

文章编号: 1004-7220(2022)05-0902-09

# 具有双特征时间参数的生物软组织黏弹性性质的理论研究

满喜, 郑松玲

(内蒙古师范大学 体育学院, 运动生物力学实验室, 呼和浩特 010022)

**摘要:**目的 探索描述生物软组织黏弹性特性的普遍行为或规律。方法 根据生物软组织的力学结构, 构建由两个线性弹簧和两个黏壶的不同组合构成的四元件黏弹性结构模型; 并通过弹性理论, 结合不同黏弹性模型的几何构型推导其运动微分方程, 利用其微分方程分析不同四元件模型的应力松弛和蠕变行为以及反映弹性和黏性相结合的应力松弛时间和蠕变推迟时间。结果 所有可能的四元件黏弹性模型都具有普遍的本构关系、应力松弛和蠕变函数形式。通过比较模型预测结果与主动脉瓣、韧带和脑动脉等生物软组织的实验数据发现, 四元件黏弹性模型能够很好地描述生物软组织的力学行为。“快”和“慢”两个特征时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  对生物软组织的应力松弛具有显著的影响。“快”松弛时间  $\tau_1$  对应力达到稳定态所需时间有明显的影 响, 而“慢”松弛时间  $\tau_2$  对松弛率的影响不显著, 但对应力松弛的稳定态有明显的影 响。结论 生物软组织的时间依赖性行为可以通过两个特征时间尺度来表征, 即“快”和“慢”时间; 且具有两个特征时间的生物软组织的应力-应变关系、应力松弛和蠕变函数具有相同的数学形式, 这与所选择的弹簧和黏壶的配置和排列无关, 但为保证模型力学参数的合理性, 针对不同的生物软组织应选取适合的模型。

**关键词:** 本构模型; 松弛; 蠕变; 黏弹性; 生物软组织

中图分类号: R 318.01 文献标志码: A

DOI: 10.16156/j.1004-7220.2022.05.021

## Theoretical Study on Viscoelastic Property of Biological Soft Tissues with Two Characteristic Time Parameters

MAN Xi, ZHENG Songling

(Lab of Sports Biomechanics, Institute of Physical Education, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China)

**Abstract:** **Objective** To explore the universal behavior or law of viscoelastic properties of biological soft tissues. **Methods** According to mechanical structure of biological soft tissues, four-element viscoelastic structure models were built, based on the varied configurations of two linear springs and two dashpots. The differential equations for motion of the viscoelastic models were derived through their geometry, and then were applied to analyze the stress relaxation, creep behavior, stress relaxation time and creep time of the four-element models. **Results** All the possible four-element viscoelastic models had universal constitutive relation, stress relaxation and creep function. The comparison between the model prediction and the experimental data from various tissues including the aortic valves, ligaments and cerebral artery illustrated that the mechanical behaviors of biological soft tissues

收稿日期: 2021-09-27; 修回日期: 2021-12-27

基金项目: 内蒙古自治区自然科学基金项目(2021MS03018), 内蒙古师范大学高层次人才科研启动经费项目(2019YJRC060)

通信作者: 满喜, 副教授, E-mail: manxi2004@126.com

could be adequately characterized by the four-element viscoelastic models. Two characteristic time  $\tau_1$  and  $\tau_2$  had a significant effect on stress relaxation of biological soft tissues, and the ‘fast’ relaxation time  $\tau_1$  had a significant effect on the time required for the stress to reach the equilibrium state, while the ‘slow’ relaxation time  $\tau_2$  didn’t obviously influence the relaxation rate, but had obvious influences on the state of stress relaxation. **Conclusions** The time-dependent behaviour of biological soft tissues can be characterized by two characteristic time scales, known as ‘fast’ and ‘slow’ time. The stress-strain relationship, stress relaxation and creep function of biological soft tissues with two characteristic times have the same mathematical form, which is independent of the configuration and arrangement of the selected spring and dashpots. However, in order to ensure the rationality of mechanical parameters of the model, suitable models should be selected for different biological soft tissues.

**Key words:** constitutive model; relaxation; creep; viscoelasticity; biological soft tissues

生物组织具有较复杂的本构行为,它的应力可能取决于应变和应变率,以及应变历史<sup>[1-10]</sup>。这些特性表明,生物组织具有结合弹性固体和黏性流体属性的复杂行为,故生物组织对机械扰动的响应具有黏弹性<sup>[11-15]</sup>。从生物力学角度来看,组织的黏弹性响应由其应力、应变和时间之间的关系确定。

为了描述生物软组织的黏弹性力学行为,有必要建立一个适当的数学模型。研究表明,由弹簧和阻尼器组合而成的离散单元黏弹性模型通过简单的数学概念能够量化应力松弛及蠕变模量,量化特征时间和速率的影响<sup>[16-20]</sup>。此外,通过改变模型中的元件数量或模型结构配置,可以相对容易地将实验数据的不同趋势拟合到模型中。这些特性使离散单元黏弹性模型成为研究和表征生物软组织黏弹性性质的热门选择。

由于黏弹性模型的构建基于生物软组织所采用的线性弹簧和阻尼器等元件数量及其组合,导致已有文献中出现了不同排列的黏弹性模型。每个模型看似都有所对应的不同的黏弹性本构行为和应力松弛以及蠕变函数,甚至许多研究不只应用一个黏弹性模型来描述组织的应力松弛和蠕变行为<sup>[21-24]</sup>。这种基本假设的不一致导致无法用一种普遍的规律来描述生物软组织的黏弹性特性。

Sopakayang 等<sup>[25]</sup>提出了描述平行纤维胶原组织应变强化、应力松弛及蠕变的本构模型。但此模型属于三元件 Zener 模型,未涉及双特征时间参数对生物软组织黏弹性特性的影响。Nassari-Benam 等<sup>[26]</sup>建立具有双特征时间参数的生物软组织黏弹性离散元模型,即四元件模型,并给出该模型的求解方法。但该模型纯粹是一种数学模型,并未对模型元件赋予物理意义,并未讨论“快”“慢”两个特征

时间对生物软组织黏弹性行为的影响。

本文基于 Nassari-Benam 等<sup>[26]</sup>的研究结果,首先对不同四元件黏弹性模型的本构关系、应力松弛和蠕变函数进行普遍推导,并对模型参数开展对比研究,探索不同模型在描述生物软组织黏弹性性质上的差异,并进一步阐明快、慢两个特征时间对生物软组织应力松弛和蠕变的影响。

## 1 模型建立

本文所建立的生物软组织四元件黏弹性结构模型由两个黏壶和两个线性弹簧的不同组合构成。模型中,弹性系数为  $E_m$  的线性弹簧和黏性系数为  $\eta_2$  的黏壶分别代表基质的弹性和黏性行为;弹性系数为  $E_f$  的线性弹簧和黏性系数为  $\eta_1$  的黏壶分别表示胶原纤维的弹性行为和胶原纤维与胶原纤维之间以及胶原纤维与基质之间的相互作用。如图 1 所示,本模型是由两个串联的线性弹簧和黏壶的并联构成。

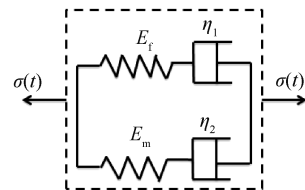


图 1 具有双特征时间参数的四元件黏弹性模型  
Fig. 1 Four-element viscoelastic model with two characteristic times

### 1.1 本构方程

生物软组织具有较复杂的本构行为,其应力可能取决于应变、应变率以及应变过程。这些特性表明,生物软组织具有结合弹性固体和黏性流体属性的复杂行为。因此,生物软组织通常以黏弹性的方式响应

机械扰动。从生物力学角度来看,组织的黏弹性响应与纯粹的弹性或黏性反应之间的差异,本质上取决于其应力、应变和时间之间的关系,即本构关系。

根据黏弹性理论,模型中组织的总应力为:

$$\sigma(t) = \sigma_f(t) + \sigma_m(t) \quad (1)$$

根据线性弹簧和黏壶的串、并联特性可得:

$$\sigma_f(t) = \sigma_{\eta_1}(t) \quad (2)$$

$$\sigma_m(t) = \sigma_{\eta_2}(t) \quad (3)$$

式中:  $\sigma_f(t)$  和  $\sigma_m(t)$  分别为胶原纤维和基质的弹性应力;  $\sigma_{\eta_2}(t)$  为基质的黏性应力;  $\sigma_{\eta_1}(t)$  为胶原纤维和胶原纤维以及胶原纤维和基质的剪切应力。而组织的总应变为:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_f(t) + \varepsilon_{\eta_1}(t) \quad (4)$$

式中:  $\varepsilon_f(t)$  为胶原纤维的弹性应变;  $\varepsilon_{\eta_1}(t)$  为胶原纤维和胶原纤维以及胶原纤维和基质的剪切应变。根据线性弹簧和黏壶的串、并联特性获得:

$$\varepsilon_f(t) + \varepsilon_{\eta_1}(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_{\eta_2}(t) \quad (5)$$

结合式(4)和(5)可以获得:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_m(t) + \varepsilon_{\eta_2}(t) \quad (6)$$

分别对式(4)、(6)求导后可得:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_f(t) + \dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) \quad (7)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_m(t) + \dot{\varepsilon}_{\eta_2}(t) \quad (8)$$

又由式(2)和(3)可以获得:

$$E_f \varepsilon_f(t) = \eta_1 \dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) \quad (9)$$

$$E_m \varepsilon_m(t) = \eta_2 \dot{\varepsilon}_{\eta_2}(t) \quad (10)$$

进一步对式(9)和(10)进行整理后可得:

$$\dot{\varepsilon}_{\eta_1}(t) = \frac{E_f}{\eta_1} \varepsilon_f(t) \quad (11)$$

$$\dot{\varepsilon}_{\eta_2}(t) = \frac{E_m}{\eta_2} \varepsilon_m(t) \quad (12)$$

再把式(11)和(12)分别代入式(7)和(8)后可得:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_f(t) + \frac{E_f}{\eta_1} \varepsilon_f(t) \quad (13)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_m(t) + \frac{E_m}{\eta_2} \varepsilon_m(t) \quad (14)$$

由式(1)可以推导出:

$$\varepsilon_f(t) = [\sigma(t) - E_m \varepsilon_m(t)] / E_f \quad (15)$$

把式(15)代入式(13)并对其进行整理后获得:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_m(t) &= \frac{E_f}{E_m \eta_1} \sigma(t) - \frac{E_f}{\eta_1} \varepsilon_m(t) + \\ &\quad \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_m} - \frac{E_f}{E_m} \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

再把式(16)代入式(14)后获得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) &= \frac{\eta_1 \eta_2 (E_f + E_m)}{E_m (\eta_1 E_m - \eta_2 E_f)} \dot{\varepsilon}(t) + \\ &\quad \frac{E_f \eta_2}{E_m (\eta_2 E_f - \eta_1 E_m)} \sigma(t) + \\ &\quad \frac{\eta_1 \eta_2}{E_m (\eta_2 E_f - \eta_1 E_m)} \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

对式(17)进行整理后可以获得:

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(t) &= -\frac{\eta_1}{E_f} \dot{\varepsilon}_m(t) + \frac{\sigma(t)}{E_m} + \\ &\quad \frac{\eta_1}{E_f E_m} \dot{\sigma}(t) - \frac{\eta_1}{E_m} \dot{\varepsilon}(t) \end{aligned} \quad (18)$$

进一步把式(18)代入式(14)后获得:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_m(t) &= \frac{E_f \eta_2 + E_f \eta_1}{E_f \eta_2 - E_m \eta_1} \dot{\varepsilon}(t) - \\ &\quad \frac{E_f}{E_f \eta_2 - E_m \eta_1} \sigma(t) - \frac{\eta_1}{E_f \eta_2 - E_m \eta_1} \end{aligned} \quad (19)$$

结合式(17)、(19)可以获得:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &+ \left( \frac{E_f \eta_2 + E_m \eta_1}{E_f E_m} \right) \dot{\sigma}(t) + \frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m} \ddot{\sigma}(t) = \\ &(\eta_1 + \eta_2) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_f \eta_1 \eta_2 + E_m \eta_1 \eta_2}{E_f E_m} \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)为生物软组织应力、应变及时间之间的关系,即生物软组织的本构方程。令

$$A = (E_f \eta_2 + E_m \eta_1) / (E_f E_m)$$

$$B = (\eta_1 \eta_2) / (E_f E_m)$$

$$P = \eta_1 + \eta_2$$

$$Q = (E_f \eta_1 \eta_2 + E_m \eta_1 \eta_2) / (E_f E_m)$$

则本构方程(20)可以改写为:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &+ A \dot{\sigma}(t) + B \ddot{\sigma}(t) = \\ &P \dot{\varepsilon}(t) + Q \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (21)$$

## 1.2 应力松弛

在生物软组织的应变保持不变的情况下,应力随时间的增加逐渐下降,即具有应力松弛现象。应力松弛和蠕变的研究对了解生物软组织在动态拉伸作用下的变形行为具有重要意义。根据应力松

弛的力学条件获得:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \ddot{\varepsilon}(t) = 0 \quad (22)$$

将式(22)代入本构方程(21)后可得:

$$\sigma(t) + A\dot{\sigma}(t) + B\ddot{\sigma}(t) = 0 \quad (23)$$

式(23)为二阶微分方程,通过对其进行求解,就可以获得生物软组织的应力松弛函数为:

$$G(t) = c_1 e^{k_1 t} + c_2 e^{k_2 t} \quad (24)$$

式中: $c_1, c_2$  为常数; $k_{1,2} = (-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}) / (2B)$ ; 而组织的应力松弛时间  $\tau_{1,2} = -1/k_{1,2}$ 。结合初始条件  $G(0) = \sigma_0$ , 即可以获得组织的应力松弛函数为:

$$G(t) = c_1 e^{k_1 t} + (\sigma_0 - c_1) e^{k_2 t} \quad (25)$$

式中: $\sigma_0$  为组织的初始应力。

### 1.3 蠕变

当生物软组织受到恒定应力后,应变随着时间的延长而逐渐增加,即有蠕变现象。因此,蠕变产生的生物力学条件为:

$$\dot{\sigma}(t) = \ddot{\sigma}(t) = 0 \quad (26)$$

把式(26)代入生物软组织本构方程(21)后可以获得:

$$\sigma_0 = P\dot{\varepsilon}(t) + Q\ddot{\varepsilon}(t) \quad (27)$$

对式(27)进行求解后就可以获得生物软组织的蠕变函数为:

$$J(t) = c_1 + c_2 e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{\sigma_0}{P} t \quad (28)$$

结合初始条件  $J(0) = \varepsilon_0$  可以获得:

$$c_2 = \varepsilon_0 - c_1 \quad (29)$$

再把式(29)代入式(28)后获得:

$$J(t) = c_1 + (\varepsilon_0 - c_1) e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \frac{\sigma_0}{P} t \quad (30)$$

令  $k = -P/Q$ , 相应的蠕变时间  $\tau = -1/k$ , 则把式(30)可以改写为组织的蠕变函数:

$$J(t) = c_1 + (\varepsilon_0 - c_1) e^{kt} + \frac{\sigma_0}{P} t \quad (31)$$

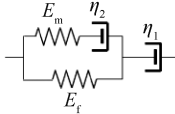
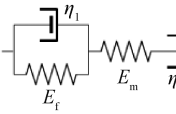
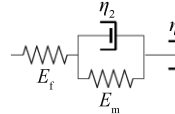
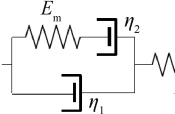
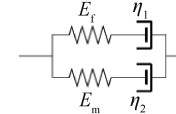
式中: $c_1$  为常数; $\varepsilon_0$  为组织的初始应变。

## 2 数值结果与分析

图 1 中创建的模型由两个线性弹簧和两个黏壶的特定组合构成。为了获得四元件黏弹性结构模型的普遍规律,在上述四元件模型的基础上构建所有可能产生两个特征时间的四元件黏弹性结构模型(弹簧和阻尼器的其他组合不会产生两个特征时间),研究其应力松弛、应变强化及蠕变行为。并对不同模型的本构方程、应力松弛和蠕变函数及模型参数之间进行对比。从表 1 可以看出,虽然不同黏弹性模型的参数不尽相同,但都遵循相同的本构关系、应力松弛函数和蠕变函数。

表 1 不同黏弹性模型本构关系、应力松弛和蠕变函数及模型参数对比

Tab. 1 Constitutive relation, stress relaxation and creep function and model parameters of different viscoelastic models

模型					
	1	2	3	4	5
A	$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E_f} + \frac{\eta_2}{E_m}$	$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E_f} + \frac{\eta_2}{E_m}$	$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E_m} + \frac{\eta_1}{E_f}$	$\frac{\eta_1 + \eta_2}{E_f} + \frac{\eta_2}{E_m}$	$\frac{E_f \eta_2 + E_m \eta_1}{E_f E_m}$
B	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$
P	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_1$	$\eta_1 + \eta_2$	$\eta_1 + \eta_2$
Q	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f} \left(1 + \frac{E_f}{E_m}\right)$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_f}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_m}$	$\frac{\eta_1 \eta_2}{E_m}$	$\frac{E_f \eta_1 \eta_2 + E_m \eta_1 \eta_2}{E_f E_m}$
本构关系	$\sigma(t) + A\dot{\sigma}(t) + B\ddot{\sigma}(t) = P\dot{\varepsilon}(t) + Q\ddot{\varepsilon}(t)$				
松弛函数	$G(t) = c_1 e^{k_1 t} + (\sigma_0 - c_1) e^{k_2 t}$				
蠕变函数	$J(t) = c_1 + (\varepsilon_0 - c_1) e^{kt} + \frac{\sigma_0}{P} t$				

为了验证本研究所推导的普遍应力松弛函数  $G(t)$  和蠕变函数  $J(t)$  在描述生物软组织黏弹性特性中的作用,把模型预测结果与生物软组织(包括主动脉瓣、韧带和脑动脉)的应力松弛和蠕变实验数据进行对比。

图 2 中的应力松弛及蠕变实验数据分别来自 Anssari-Benam 等<sup>[29]</sup>的猪主动脉瓣、Thornton 等<sup>[27-28]</sup>的兔内侧副韧带及 Li 等<sup>[30]</sup>人类大脑动脉的单轴应

力松弛和蠕变实验。其中,图 2(a)所示为应变等于猪主动脉瓣在圆周方向上的失效应变 6%、兔内侧副韧带 5% 及人类大脑动脉 25.2% 时采集到的应力松弛数据与模型预测结果的对比;图 2(b)所示为应力等于猪主动脉瓣在圆周方向上失效应力 5%、兔内侧副韧带应力为 14 MPa 和人类大脑动脉应力为 18.7 kPa 时采集到的蠕变数据与模型预测结果的对比。

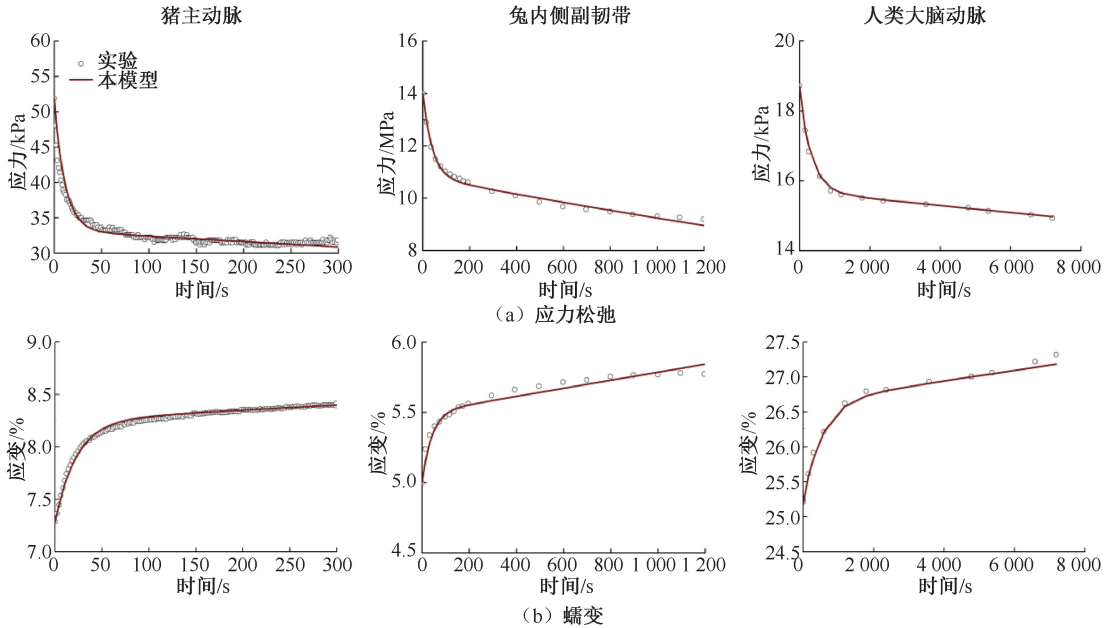


图 2 应力松弛和蠕变实验数据与模型预测对比

Fig. 2 Comparison between experimental data of stress relaxation and creep versus model predictions (a) Stress relaxation, (b) Creep

应力松弛函数  $G(t)$  和蠕变函数  $J(t)$  中的其他参数是为了拟合实验通过使用 Matlab 中的 Levenberg-Marquardt 算法取了最佳参数 ( $R^2=0.98$ )。从表 2 中给出的拟合参数,可以计算出相应的力学参数:

$$E_t = 10.76 \sim 21.57 \text{ MPa}$$

$$E_m = 10.71 \sim 1\,943.00 \text{ MPa}$$

$$\eta_1 = 122.89 \sim 44\,000 \text{ MPa} \cdot \text{s}$$

$$\eta_2 = 122.55 \sim 44\,160 \text{ MPa} \cdot \text{s}$$

上述参数与 Gao 等<sup>[31]</sup>引用的参数有相同数量级,说明本文的计算具有合理性。

表 2 拟合实验数据所获得的应力松弛函数  $G(t)$  和蠕变函数  $J(t)$  的参数值

Tab. 2 Parameters for relaxation function  $G(t)$  and creep function  $J(t)$  by fitting experiment

组织	应力松弛			蠕变		
	$c_1/\text{MPa}$	$k_1/(\text{s}^{-1})$	$k_2/(\text{s}^{-1})$	$c_1$	$k/(\text{s}^{-1})$	$\eta/(\text{MPa} \cdot \text{s})$
猪主动脉瓣	0.018 8	-0.088 4	$-2.44 \times 10^{-4}$	0.082 5	-0.044 0	$4.40 \times 10^4$
兔内侧副韧带	3.184 0	-0.025 0	$-1.57 \times 10^{-4}$	0.055 0	-0.024 5	$4.90 \times 10^6$
人类大脑动脉	0.003 0	-0.003 1	$-6.59 \times 10^{-6}$	0.266 4	-0.001 9	$2.47 \times 10^4$

从图 2 可以看出,本文所导出的普遍应力松弛函数  $G(t)$  和蠕变函数  $J(t)$  在较少误差范围内能够较准确描述生物软组织的应力松弛及蠕变行为,该

结果进一步证明了本文所建立的具有双特征时间参数的四元件黏弹性结构模型具有合理性。

本文根据普遍应力松弛函数  $G(t)$  与应力松弛时

间  $\tau$  的关系,讨论松弛时间对生物软组织应力松弛行为的影响。图 3(a)所示为应力松弛时间  $\tau_1$  对猪主动脉瓣、兔内侧副韧带及人类大脑动脉应力松弛行为的影响。可以看出,  $\tau_1$  对应力达到稳态所需时间有明显的影 响。随着  $\tau_1$  的增加,松弛率变小,生物软组

织达到稳定应力所需时间变长。而图 3(b)所示为应力松弛时间  $\tau_2$  对生物软组织应力松弛行为的影响。可以看出,  $\tau_2$  对松弛率的影响不显著,但对应力松弛的稳定态有明显的影 响。随着  $\tau_2$  的增加,生物软组 织达到的稳定应力也随之增加。

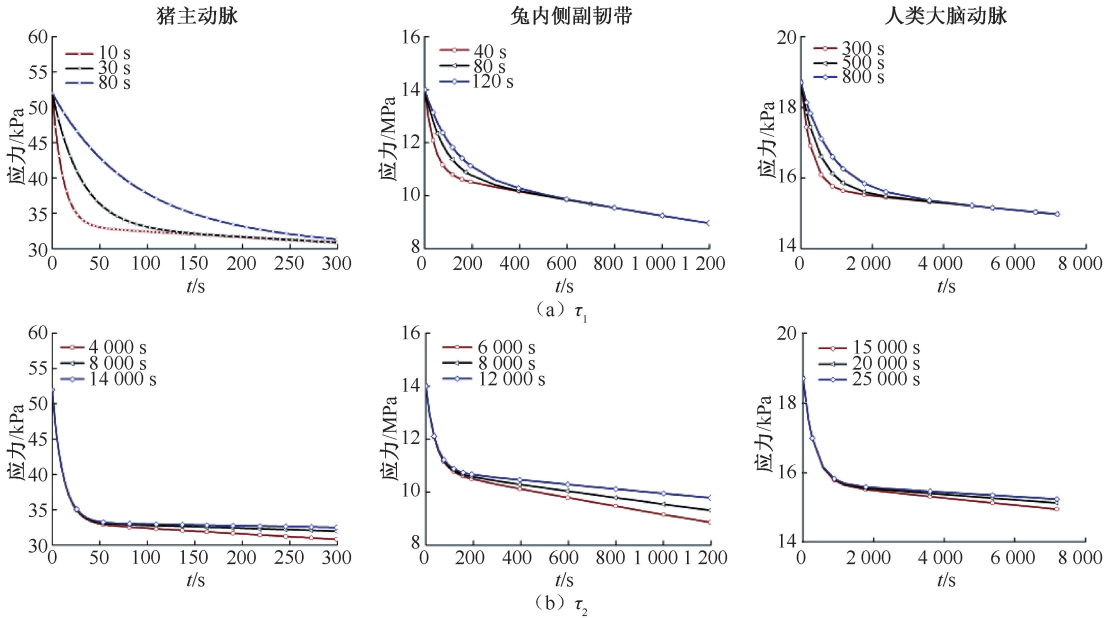


图 3 松弛时间  $\tau_1$  和  $\tau_2$  对应力松弛行为的影响

Fig. 3 Influences of the relaxation time  $\tau_1$  and  $\tau_2$  on stress relaxation (a)  $\tau_1$ , (b)  $\tau_2$

本文进一步讨论了弛豫时间(蠕变时间)  $\tau$  对生物软组织蠕变行为的影响(见图 4)。可以看出,弛豫时间  $\tau$  对主动脉瓣、韧带和脑动脉蠕变行为的

影响基本相似。随着弛豫时间  $\tau$  的增加,生物软组织的蠕变速率变慢,组织达到其稳态的时间变长。

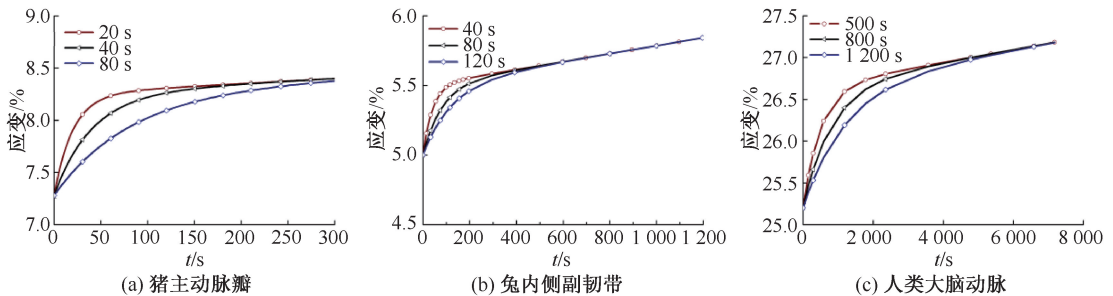


图 4 弛豫时间  $\tau$  对蠕变行为的影响

Fig. 4 Influences of the relaxation time  $\tau$  on creep (a) Porcine aortic valve, (b) Rabbit medial collateral ligament, (c) Human middle cerebral artery

最后,为了获得所建双特征时间参数的黏弹性模型在描述生物软组织变形行为的差异特性,本文对不同模型的应力松弛和蠕变现象进行比较研究。

图 5 所示为 5 种黏弹性模型在相同力学参数条件下 ( $E_f = 3\ 536\ \text{MPa}$ ,  $E_m = 300\ \text{MPa}$ ,  $\eta_1 = 16\ \text{GPa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta_2 = 8\ \text{GPa} \cdot \text{s}$ ) 猪主动脉蠕变行为的对比曲线。可以看出,5 种模型在描述生物软组织蠕变行为的走势基本相似,其中模型 1 和 3 基本重叠,模型 4 和 5

图 5 所示为 5 种黏弹性模型在相同力学参数条

基本重叠。因此,能描述蠕变行为的双特征时间参数的黏弹性模型可以归结为3种,即①模型1、3,②模型4、5,③模型2。显而易见,模型2的蠕变率最大,其次是模型4、5,蠕变速度最慢的是模型1、3;而蠕变稳态应变依次排序为模型2>模型1、3>模型4、5。

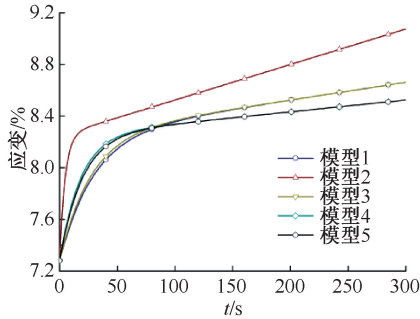


图5 不同黏弹性模型在相同模型参数条件下主动脉瓣蠕变行为对比

Fig. 5 Comparison of aortic valve creep behavior of different viscoelastic models under the same model parameters

图6所示为5种黏弹性模型在相同力学参数条件下( $E_r = 3 \text{ GPa}$ ,  $E_m = 50 \text{ MPa}$ ,  $\eta_1 = 8 \text{ GPa} \cdot \text{s}$ ,  $\eta_2 = 10 \text{ GPa} \cdot \text{s}$ )兔内侧副韧带应力松弛行为的对比曲线。可以看出,5种模型描述生物软组织应力松弛行为的趋势基本相似,其中模型1、2、4、5基本重叠,说明这4种黏弹性模型在描述生物软组织的应力松弛行为上完全等价。模型3的松弛率,即松弛速度比其他4个模型快,稳态应力也比其他4个模型大。以上结论为生物软组织黏弹性模型的选择提供参考。

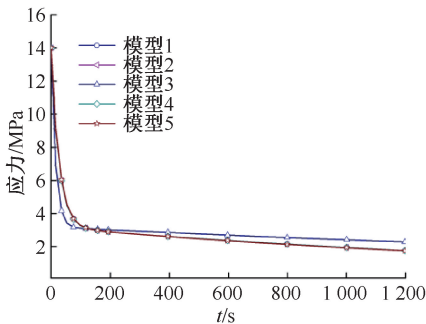


图6 不同黏弹性模型在相同模型参数条件下兔内侧副韧带应力松弛行为对比

Fig. 6 Comparison of rabbit medial collateral ligament stress relaxation behavior of different viscoelastic models under the same model parameters

### 3 讨论

生物软组织,例如韧带和肌腱,具有很明显(长期)的黏弹性性质。当它受到恒定应力后,应变随着时间的增长逐渐上升,即具有蠕变现象。在它获得的应变保持不变的情况下,应力随着时间的增加逐渐下降,即具有应力松弛现象。导致这些组织的长期黏弹性性质的微观结构起源仍然未知。有关生物软组织黏弹性特性的研究已有报道,其中最常用的黏弹性模型是由 Fung<sup>[1]</sup>提出的准线性黏弹性(quasi-linear viscoelastic, QLV)模型。尽管 QLV 模型获得较大的成功,但也被证明具有一定的局限性。该模型无法分别解释韧带在高应力和应变水平所显现出来的蠕变速率与松弛率的依赖关系,而且只能呈现单一特征弛豫时间,故可能不适用于具有两个特征时间的生物组织。类似地,Maxwell 模型可以准确描述生物软组织的应力松弛过程,但不太符合生物软组织蠕变行为,而 Voigt 和 Kelvin 模型只能准确地描述软组织的蠕变行为。因此,以往研究中经常出现使用相互独立的两种模型去分别描述相同生物组织的应力松弛和蠕变行为,未能解决具有两个特征时间的生物软组织的黏弹性是否为一种普遍行为的重要问题。

本文根据弹性理论,推导并提出控制生物软组织离散单元黏弹性模型本构行为的应力、应变和时间之间的统一普遍关系,以及应力松弛和蠕变函数。为了验证所推出的应力松弛和蠕变函数能够描述生物软组织的黏弹性特性,将模型预测结果与主动脉瓣、韧带和脑动脉标本的应力松弛和蠕变实验数据进行对比研究。结果表明,模型预测结果与近期实验数据吻合得比较好。

软组织的时间依赖性行为可以通过两个特征时间尺度来表征,即“快”和“慢”时间,或“短”和“长”时间记忆尺度。本文发现,较短松弛时间  $\tau_1$  对应力达到稳态所需时间有明显的影 响。随着  $\tau_1$  增加,松弛率变小,生物软组织达到稳态应力所需时间变长;而较长松弛时间  $\tau_2$  对松弛率的影响不显著,但对应力松弛的稳态有明显的影 响。随着  $\tau_2$  增加,生物软组织达到的稳态应力也随之增加。

可以通过本文所推导的统一本构方程、应力松弛和蠕变函数比较不同组织之间的特征黏弹性参

数,并有助于建立软组织黏弹性参数的通用值。模型参数  $A$ 、 $B$ 、 $P$  和  $Q$  可根据相关实验数据进行量化,并可直接在不同生物组织之间进行比较。此外,可以建立模型常数 ( $E_i$  和  $\eta_i$ ) 与材料参数 (如弛豫时间  $\tau$ ) 之间的关系,并且根据已知模型常数的差异来解释不同生物组织的材料参数之间的差异。

## 4 结论

本文根据生物软组织的力学结构,构建由两个线性弹簧和两个黏壶的不同组合构成的四元件离散单元黏弹性模型;并通过弹性理论,结合不同黏弹性模型的几何构型推导其运动微分方程、应力松弛和蠕变函数。通过对比研究发现,所有可能的四元件黏弹性模型的应力-应变关系、应力松弛和蠕变函数具有相同的数学形式,这与所选择的弹簧和黏壶的配置和排列无关,但为保证模型的力学参数在合理的范围之内,针对不同的生物软组织应选取适合的模型。本文研究结果适合描述所有双特征时间参数的生物组织的力学行为。

## 参考文献:

- [ 1 ] FUNG YC. Biomechanics: Mechanical properties of living tissues [M] New York: Springer-Verlag, 1993.
- [ 2 ] BISCHOFF JE, ARRUDA EM, GROSH K. A rheological network model for the continuum anisotropic and viscoelastic behaviour of soft tissue [J]. *Biomech Model Mechan*, 2004, 3: 56-65.
- [ 3 ] XI M, YUN GH, NARSU B. A mathematical model on stress-strain of the epimysium of skeletal muscles [J]. *J Theor Biol*, 2015, 365: 175-180.
- [ 4 ] FERREIDONNEZHAD B, O'CONNOR C, MCGARRY JP. A new anisotropic soft tissue model for elimination of unphysical auxetic behaviour [J]. *J Biomech*, 2020, 111: 110006.
- [ 5 ] LI ZG, LI C, LI DP, *et al.* A comprehensive study on the mechanical properties of different regions of 8-week-old pediatric porcine brain under tension, shear, and compression at various strain rates [J]. *J Biomech*, 2020, 98: 109380.
- [ 6 ] BARRETT JM, CALLAGHAN JP. A one-dimensional collagen-based biomechanical model of passive soft tissue with viscoelasticity and failure [J]. *J Theor Biol*, 2002, 509: 110488.
- [ 7 ] LI Y, ZHANG W, LU YC, *et al.* Hyper-viscoelastic mechanical behavior of cranial pia mater in tension [J]. *Clin Biomech*, 2020, 80: 105108.
- [ 8 ] QUAGLINI V, PREVIDI F, CONTRO R, *et al.* A discrete-time nonlinear Wiener model for the relaxation of soft biological tissues [J]. *Med Eng Phys*, 2002, 24(1): 9-19.
- [ 9 ] FALLAH A, AHMADIAN MT, AGHDAM MM. Rate-dependent behavior of connective tissue through a micromechanics-based hyper viscoelastic model [J]. *Int J Eng Sci*, 2017, 121(12): 91-107.
- [ 10 ] FALLAH A, AHMADIAN MT, FIROZBAKHSH K, *et al.* Micromechanical modeling of Rate-dependent behavior of Connective tissues [J]. *J Theor Biol*, 2017, 416: 119-128.
- [ 11 ] BEL-BRUNON A, KEHL S, MARTIN C, *et al.* Numerical identification method for the non-linear viscoelastic compressible behavior of soft tissue using uniaxial tensile tests and image registration-Application to rat lung parenchyma [J]. *J Mech Behav Biomed Mater*, 2014, 29: 360-374.
- [ 12 ] 余龙, 徐柯淞, 万军, 等. 血管壁弹性模量对颈动脉狭窄血流储备分数的影响 [J]. *医用生物力学*, 2020, 35(4): 397-402.
- [ 12 ] YU L, XU HS, WAN J, *et al.* The effect from elastic modulus of vessels on fractional flow reserve of carotid artery stenosis [J]. *J Med Biomech*, 2020, 35(4): 397-402.
- [ 13 ] KOBAYASHI Y, OKAMURA N, TSUKUNE M, *et al.* Non-minimum phase viscoelastic properties of soft biological tissues [J]. *J Mech Behav Biomed*, 2018, 110: 103795.
- [ 14 ] OFTADEH R, CONNIZZO BK, NIA HT, *et al.* Biological connective tissues exhibit viscoelastic and poroelastic behavior at different frequency regimes: Application to tendon and skin biophysics [J]. *Acta Biomater*, 2018, 70: 249-259.
- [ 15 ] 丁皓, 张迎, 刘雨佳, 等. 冠脉可降解支架介入的血管力学特性数值模拟与实验研究 [J]. *医用生物力学*, 2021, 36(1): 6-13.
- [ 15 ] DING H, ZHANG Y, LIU YJ, *et al.* Numerical simulation and experimental study on vascular mechanical properties of coronary degradable stent intervention [J]. *J Med Biomech*, 2021, 36(1): 6-13.
- [ 16 ] TANAKA E, PELAYO F, KIM N, *et al.* Stress relaxation behaviors of articular cartilages in porcine temporomandibular joint [J]. *J Biomech*, 2014, 47(7): 1582-1587.
- [ 17 ] BRONSHTEN T, AU-YEUNG G, SARIG U, *et al.* A mathematical model for analyzing the elasticity, viscosity, and failure of soft tissue: Comparison of native and decellularized porcine cardiac extracellular matrix for tissue engineering [J]. *Tissue Eng Part C Method*, 2013, 19(8): 620-630.
- [ 18 ] WANG X, SCHOEN JA, RENTSCHLER ME. A quantita-



- tive comparison of soft tissue compressive viscoelastic model accuracy [J]. *J Mech Behav Biomed*, 2013, 20: 126-136.
- [19] CHUANG SF, LIN SY, WEI PJ, *et al.* Characterization of the elastic and viscoelastic properties of dentin by a Nano indentation creep test [J]. *J Biomech*, 2015, 48: 2155-2161.
- [20] MARTINS C, PINTO V, GUEDES RM, *et al.* Creep and stress relaxation behaviour of PLA-PCL fibres: A linear modelling approach [J]. *Procedia Eng*, 2015, 114: 768-775.
- [21] BABAEI B, VELASQUEZ-MAO AJ, THOMOPOULOS S, *et al.* Discrete quasi-linear viscoelastic damping analysis of connective tissues, and the biomechanics of stretching [J]. *J Mech Behav Biomed*, 2017, 69: 193-202.
- [22] FLYNN C, RUBIN MB. An anisotropic discrete fiber model with dissipation for soft biological tissues [J]. *Mech Mater*, 2014, 68(1): 217-227.
- [23] AUDENAERT EA, KHANDUJA V, BAUWENS C, *et al.* A discrete element model to predict anatomy of the psoas muscle and path of the tendon: Design implications for total hip arthroplasty [J]. *Clin Biomech*, 2019, 70: 186-191.
- [24] SOPAKAYANG R, VITA RD, KWANSA A, *et al.* Elastic and viscoelastic properties of a type I collagen fiber [J]. *J Theor Biol*, 2012, 293: 197-205.
- [25] SOPAKAYANG R, VITA RD. A mathematical model for creep, relaxation and strain stiffening in parallel-fibered collagenous tissues [J]. *Med Eng Phys*, 2011, 33(9): 1056-1063.
- [26] ANSSARI-BENAM A, BUCCHI A, BADER DL. Unified viscoelasticity: Applying discrete element models to soft tissues with two characteristic times [J]. *J Biomech*, 2015, 48(12): 3128-3134.
- [27] THORNTON GM, OLIYNYK A, FRANK CB, *et al.* Ligament creep cannot be predicted from stress relaxation at low stress: A biomechanical study of the rabbit medial collateral ligament [J]. *J Orthop Res*, 1997, 15(5): 652-656.
- [28] THORNTON GM, FRANK CB, SHRIVE NG. Ligament creep behavior can be predicted from stress relaxation by incorporating fiber recruitment [J]. *J Rheol*, 2011, 4(8): 1603-1610.
- [29] ANSSARI-BENAM A, DAN LB, SCREEN H. Anisotropic time-dependant behaviour of the aortic valve [J]. *J Mech Behav Biomed*, 2011, 4(8): 1603-1610.
- [30] LI D, XU D, LI P, *et al.* Viscoelastic evaluation of fetal umbilical vein for reconstruction of middle cerebral artery [J]. *Neural Regen Res*, 2013, 8(32): 3055-3062.
- [31] GAO Y, WAAS AM, FAULKNER JA, *et al.* Micromechanical modeling of the epimysium of the skeletal muscles [J]. *J Biomech*, 2008, 41(1): 1-10.