

文章编号:1004-7220(2021)03-0437-05

一种适用于肌肉高应变率下主被动特性数值计算模型

姜力, 柏杰锋, 刘萍, 王卫青, 乔念东

(中国兵器工业导航与控制技术研究所, 北京 100089)

摘要:目的 在显式动力学计算理论基础上,提出一种适用于肌肉高应变率下主被动特性数值计算模型。方法 在计算肌肉单元高应变率下运动方程的过程中,于每一时间步计算节点力公式中引入高应变率下的 Hill 肌肉三元素计算模型,对每一时间步的节点力进行修正。结果 由于在数值计算过程中引入 Hill 肌肉三元素模型,使得肌肉单元具有一般结构本构模型的被动特性和其专有的主动特性。结论 研究结果有助于对肌肉高应变率下的动力学响应和损伤问题进行数值计算。

关键词: Hill 三元素肌肉模型; 高应变率; 本构模型

中图分类号: R 318.01 **文献标志码:** A

DOI: 10.16156/j.1004-7220.2021.03.022

Numerical Model for Calculating Active and Passive Properties of Muscles with High Strain Rate

JIANG Li, BAI Jiefeng, LIU Ping, WANG Weiqing, QIAO Niandong

(Navigation and Control Technology Research Institute of China North Industries Group Corporation, Beijing 100089, China)

Abstract: **Objective** On the basis of explicit dynamics calculation theory, a numerical model for calculating active and passive properties of muscles with high strain rate was proposed. **Methods** In the process of calculating the motion equation of muscle element with high strain rate, Hill's three-factor muscle model with high strain rate was introduced into the node force formula to modify the node force in each time step. **Results** As Hill's three-factor muscle model was introduced in numerical calculation, the muscle element had the passive characteristics of the general structural constitutive model and its proprietary active characteristics. **Conclusions** The research findings will contribute to numerical calculation for dynamic response and damage of muscles with high strain rate.

Key words: Hill's three-factor muscle model; high strain rate; constitutive model

肌肉是构成动物体的主要组织,其主要功能是在当受到来自神经系统的刺激时产生收缩,进而出现动物应答体内外刺激的各种运动。肌肉功能和力学特性是人体运动的基础。有限元方法被广泛应用于肌肉被动安全与损伤生物力学领域,基于连续介质的肌肉本构模型研究中,大多提出以复合材料

形式将肌肉的整体响应分解为线性叠加的主动与被动本构模型。常见的模拟肌肉主动力的方法是采用单轴的 Hill 肌肉本构模型。该方法最早将肌肉简化为起点与止点之间的一维直线段,并不考虑几何以及肌肉间交互作用的影响。被动本构模型往往以应变能密度函数的形式,分别定义体积应变

响应、等容超弹性响应和等容黏弹性响应,并叠加得到被动响应^[1-4]。国内关于肌肉的有限元研究较少,在多数生物力学有限元模型中,肌肉作用直接以离散载荷施加于模型中。在动态研究中,肌肉同样被化简为一维单元,且往往仅保留被动响应。部分模型采用实体单元模拟肌肉,但仍未添加主动响应^[5-6]。因此,提出一种表征肌肉高应变率条件下的主被动特性数值计算模型,以实现高应变率下的动力学响应和损伤分析,具有重要意义。

本文首先讲述显式动力学有限元理论模型和高应变率下的 Hill 三元素模型,然后在上述理论基础上推导出一种表征高应变率肌肉主被动特性的有限元计算模型,从而得出相关的结论。

1 材料与方法

1.1 显式动力学有限元理论模型

1.1.1 显式动力学动量方程弱形式 显式动力学的主要控制方程为:

$$\text{运动方程} \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$\text{边界条件} \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i \quad (2)$$

式中: σ_{ij} 、 u_i 为应力张量和位移张量; ρ 为密度; \bar{f}_i 、 \bar{T}_i 为域 V 中的体力和边界上给定的面力, $i, j = 1, 2, 3$ 。

利用加权余量法、分布积分,得到满足式(1)、(2)带有边界条件偏微分方程的弱形式:

$$\int_V \frac{\partial(\delta v_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV - \int_V \delta v_i \rho f_i dV - \int_{A_j} \delta v_i \bar{T}_i dA + \int_V \delta v_i \rho \ddot{u}_i dV = 0 \quad (3)$$

式中: δv_i 为权函数虚速度。式(3)就是动量方程的弱形式,称为虚功率方程。

1.1.2 动量方程弱形式的有限元离散 用 N 个有限单元离散物体,则质点 X 在任一时刻的空间坐标 $x_i(X, t)$ 可以近似表示为:

$$x_i(X, t) = N_I(X) x_{iI}(t) \quad (4)$$

式中: 节点 I 的坐标记为 x_{iI} ; N_I 为节点 I 形函数。则空间内任一质点 X 的位移可以用单元节点位移近似表示为:

$$u_i(X, t) = N_I(X) u_{iI}(t) \quad (5)$$

将式(5)对时间求导,得到单元内任一点 X 的速度和加速度分别为:

$$\dot{u}_i(X, t) = N_I(X) \dot{u}_{iI}(t) \quad (6)$$

$$\ddot{u}_i(X, t) = N_I(X) \ddot{u}_{iI}(t) \quad (7)$$

虚速度 $\delta v_i(X)$ 也可以近似表示为:

$$\delta v_i(X) = N_I(X) \delta v_{iI} \quad (8)$$

将式(6)~(8)代入式(3),得到有限元离散形式的近似虚功率方程^[7]:

$$\int_V \frac{\partial(N_I)}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV - \int_V N_I \rho f_i dV - \int_{A_j} N_I \bar{T}_i dA + \int_V N_I \rho N_J \dot{u}_{iJ} dV = 0 \quad (9)$$

式中: I, J 为单元节点个数。

对于方程(9)中:

节点内力

$$f_{iI}^{\text{int}} = \int_V \frac{\partial(N_I)}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (10)$$

节点外力

$$f_{iI}^{\text{ext}} = \int_V N_I \rho f_i dV - \int_{A_j} N_I \bar{T}_i dA \quad (11)$$

节点惯性力

$$f_{iI}^{\text{kin}} = \int_V N_I \rho N_J \dot{u}_{iJ} dV \quad (12)$$

1.1.3 显式求解过程 采用中心差分法,三维8节点实体单元,显式求解上述方程过程如表1所示。

表1 显式求解过程

Tab.1 Explicit solution procedure

序号	求解过程
1	利用初始载荷计算各节点加速度,确定初始时间步长 Δt_1
2	通过节点加速度和 Δt_1 计算下一时刻各节点位移、速度
3	通过各节点位移、速度计算出雅克比行列式、应变率矩阵和应变矩阵
4	采用被动本构模型,通过应变矩阵计算出应力矩阵
5	利用式(10)计算出节点内力
6	利用式(9)计算下一时刻各节点加速度,确定时间步长 Δt_2
7	循环2~6进行求解

1.2 高应变率下的 Hill 三元素模型

1.2.1 Hill 模型 肌肉的基本机能是把化学能转化为机械能。表征肌肉活动的基本生物力学指标有两个:①肌张力,即肌肉端部测量出来的力;②收缩速度,即肌肉长度变化的速度。这是两个与肌肉实际活动密切相关且可测的宏观量。Hill 以青蛙的缝匠肌为试样,进行快速释放实验,利用能量原理及经验假设,给出肌肉收缩力与收缩速度之间的关系式:

$$(F + a)(v + b) = (F_0 + a)b \quad (13)$$

式中: F 为肌肉收缩力; F_0 为最大等长收缩力; v 为收缩速度; a, b 为力学常数。Hill 方程是由快速释放挛挛态青蛙缝匠肌的实验推导而来, 它仅仅揭示了肌肉性质的一个方面。Hill 方程不能描述挛挛肌肉慢慢释放时的应力-速度关系, 也不能描述不受刺激的肌肉力学特性^[8]。

1.2.2 Hill 三元素肌肉模型 基于 Hill 模型的缺陷, Hill 提出了肌肉的三元素模型(见图 1)。Hill 的三元素模型表明, 活的肌肉由 3 种元素组成。其中, 非线性的收缩元素(contractile element, CE)和线性的弹性元素(series elastic element, SEE)串联排列, 再外加一个并联元素(passive element, PE)。模型中, 各种元素的意义和肌肉的超微结构密切相关。CE 代表滑动的肌动蛋白和肌球蛋白分子串联, SEE 代表肌节和结缔组织的固有弹性, PE 也来源于结缔组织的固有弹性。其中, SEE 在考虑串联肌腱适应性时常常被忽略。

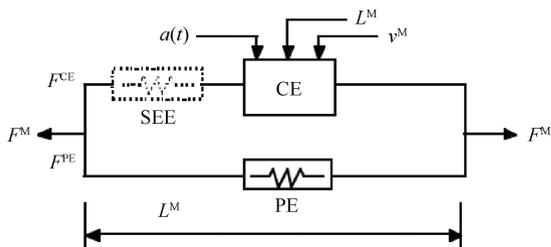


图 1 Hill 的肌肉三元素模型

Fig.1 Hill's three-factor muscle model

因此, 肌肉一维线性单元合力 F^M 为 CE 受力 F^{CE} 和 PE 受力 F^{PE} 之和, 即:

$$F^M = F^{CE} + F^{PE} \quad (14)$$

图 1 中, L^M, v^M 为肌肉单元的长度和速度, 令:

$$L = L^M / L_0 \quad (15)$$

$$v = \frac{-v^M}{v_{\max} S_v [a(t)]} \quad (16)$$

式中: L_0 为肌肉单元的初始长度; v_{\max} 为 CE 的最大卸载收缩速度; S_v 为 CE 最大收缩速度的比例系数, 其中 $S_v [a(t)]$ 是和肌肉单元的刺激水平 $a(t)$ 相关的函数。对于 F^{PE} , 设其弹性模量为 E , 可得:

$$F^{PE} = 0, \quad L \leq 1 \quad (17)$$

$$F^{PE} = E(L^M - L_0), \quad L > 1 \quad (18)$$

对于 F^{CE} , 由文献[9]可得:

$$F^{CE} = a(t) F_{\max} f_{TL}(L) f_{TV}(v) \quad (19)$$

式中: $a(t)$ 为随时间变化的肌肉刺激水平; F_{\max} 为最大等长收缩力。 $f_{TL}(L)$ 和 $f_{TV}(v)$ 则为两条和 L, v 相关的曲线, 即 Hill 的试验曲线^[9]。

1.2.3 高应变率下的 Hill 三元素模型 不考虑刺激水平的影响, 令 $a(t) = 1, S_v [a(t)] = 1$ 。由于在高应变率条件下, 式(16)中 $|v| \geq 1$, 通过 Hill 的 $f_{TV}(v)$ 试验曲线, 则式(19)可以简化为:

$$F^{CE} = 1.4 F_{\max} f_{TL}(L), \quad L \leq 2 \quad (20)$$

$$F^{CE} = 0, \quad L > 2 \quad (21)$$

由式(14)、(17)、(18)、(20)、(21)可推导出高应变率下肌肉一维线性单元合力计算公式:

$$F^M = 1.4 F_{\max} f_{TL}(L), \quad L \leq 1 \quad (22)$$

$$F^M = 1.4 F_{\max} f_{TL}(L) + E(L^M - L_0), \quad 1 < L \leq 2 \quad (23)$$

$$F^M = E(L^M - L_0), \quad L > 2 \quad (24)$$

2 结果

2.1 肌肉高应变率下的主被动特性计算模型

利用式(9)可以计算出肌肉高应变率条件下的被动特性; 利用式(22)~(24)可以计算出肌肉高应变率条件下的主动特性。因此, 在计算式(9)时, 在每一时间步上, 引入了包含式(22)~(24)的节点力修正量。修正后的公式如下:

$$\int_v \frac{\partial(N_i)}{\partial x_j} \sigma_{ji} dv - \int_v N_i \rho f_i dv - \int_A N_i \bar{T}_i dA + \int_v N_i \rho N_j \ddot{u}_{ij} dV + F_{ii} = 0 \quad (25)$$

式中: F_{ii} 为通过式(22)~(24)计算的每一时间步长的节点力修正量。

为计算出 F_{ii} , 需要用到计算过程中的约束面。在计算肌肉在惯性力作用下的典型动力学问题时, 将右表面约束, 施加 $F(t)$ 惯性力曲线(见图 2)。初始时刻, 计算各个节点到约束面的距离作为 L_0 (如图 2 中实线所示), 之后计算不同时刻各个节点到约束面的距离作为 L^M (如图 2 中虚线所示), 通过式(22)~(24)可以计算出节点力修正量 F_{ii} 。

2.2 肌肉主被动特性显式求解过程

采用中心差分法, 三维 8 节点实体单元, 显式求解上述方程过程如表 2 所示。

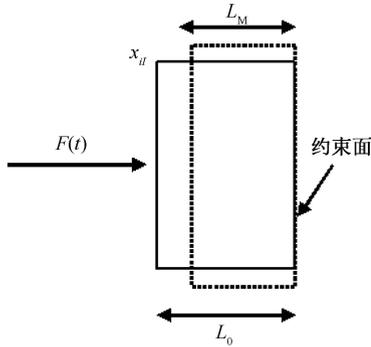


图2 典型动力学问题
Fig.2 Typical kinetic problem

2.3 肌肉主被动特性模型计算应用

采用图3所示的典型六面体实体肌肉单元(边长10 mm的正方体),对单元施加z向加速度曲线(见图4)。被动特性材料模型选用准线性黏弹性(quasilinear viscoelastic, QLV)本构模型。QLV模型和Hill模型材料参数见表3。

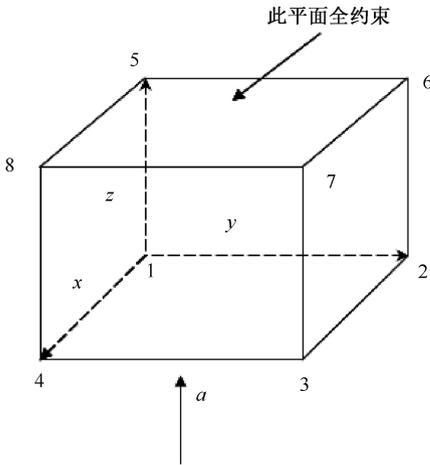


图3 六面体实体肌肉单元
Fig.3 Hexahedral solid muscle element

表2 主被动特性求解过程

Tab.2 Solution process of active and passive characteristics

序号	求解过程
1	利用初始载荷计算各节点加速度,计算各个节点到约束面的距离,确定初始时间步长 Δt_1
2	通过节点加速度和 Δt_1 计算下一时刻各节点位移、速度、坐标
3	通过各节点位移、速度、坐标计算出雅克比行列式、应变率矩阵、应变矩阵和各个节点到约束面的距离
4	采用被动本构模型,通过应变矩阵计算出应力矩阵
5	利用式(10)计算出节点内力
6	利用式(22)、(23)计算出节点力修正量
7	利用式(24)计算下一时刻各节点加速度,确定时间步长 Δt_2
8	循环2~7进行求解

表3 材料模型参数^[10]

Tab.3 Material model parameters^[10]

模型参数	参数取值	参数说明
$\rho / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1.06	QLV模型密度
ν	0.495	QLV模型泊松比
C_i	0.991, 0, 34.65	QLV模型瞬时弹性响应参数
G_i / MPa	0.697, 1.086, 0.102, 0.1	QLV模型黏性剪切模量
β_i / s^{-1}	589.1, 312.4, 1, 4.5 $\times 10^{-3}$	QLV模型黏性松弛时间
$F_{\text{max}} / \text{N}$	22.5	Hill模型最大等长收缩力
C_{short}	0.3	Hill模型速度曲线收缩段形状因子

对只考虑被动特性和考虑主被动特性的计算结果进行比较计算。被动特性模型计算的最大应力为0.73 MPa,主被动特性模型计算的最大应力为0.34 MPa(见图5)。被动特性模型计算的节点1最大位移为0.25 mm,主被动特性模型计算的节点1最大位移为0.119 mm(见图6)。由于考虑了肌肉的被动特性,其应力和位移分别减小了53.4%和52.4%。

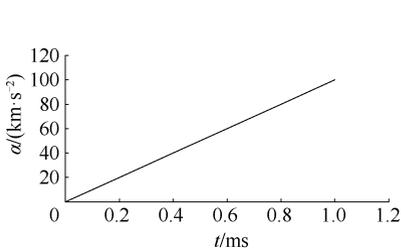


图4 加速度曲线
Fig.4 Acceleration curve

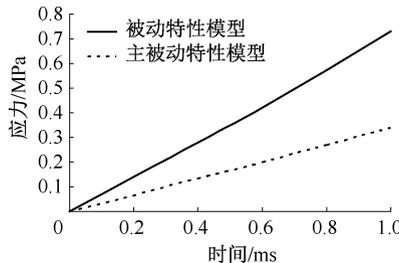


图5 单元应力曲线
Fig.5 Element stress curve

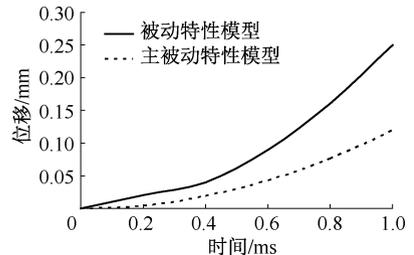


图6 节点1位移曲线
Fig.6 Displacement curve of node 1

3 讨论与结论

本文在显示动力学理论模型和高应变率下Hill三元素计算模型的基础上,通过约束面,实现了Hill三元素计算模型对各个时间步节点力的修正,使得计算模型具有肌肉的主被动特性。通过对典型六面体肌肉单元高应变率条件下的计算分析发现,由于考虑了肌肉的主动特性,其在相同载荷下的应力和位移都有所减小,且减小的比例较大。目前,相关肌肉模型都是针对低应变率条件,针对枪伤、破片损伤等高应变率条件下的动力学响应和损伤分析还需相应的高应变率材料模型进行支撑。因此,本文的计算模型对于研究高应变率下的肌肉动力学响应和损伤分析具有一定指导作用。

参考文献:

- [1] 李凡, 粟四橙, 胡伟, 等. 基于本构模型参数的肌肉主动动力响应有限元分析[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2014, 41(10): 49-53.
- [2] CHANCEY VC, NIGHTINGALE RW, VAN EE CA, *et al.* Improved estimation of human neck tensile tolerance: Reducing the range of reported tolerance using anthropometrically correct muscles and optimized physiologic initial conditions [J]. *Stapp Car Crash J*, 2003, 47: 135-153.
- [3] BROLIN K, HALLDIN P, LEIJONHUFVUD I. The effect of muscle activation on neck response [J]. *Traffic Inj Prev*, 2005, 6(1): 67-76.
- [4] FICE JB, CRONIN DS. Investigation of whiplash injuries in the upper cervical spine using a detailed neck model [J]. *J Biomech*, 2012, 45(6): 1098-1102.
- [5] 罗林聪, 马立敏, 林泽, 等. 基于 AnyBody 骨骼肌肉多体动力学分析的有限元仿真[J]. 医用生物力学, 2019, 34(3): 237-242.
- LUO LC, MA LM, LIN Z, *et al.* Finite element simulation of AnyBody-based musculoskeletal multi-body dynamics [J]. *J Med Biomech*, 2019, 34(3): 237-242.
- [6] 刘慧, 沈国权, 张喜林, 等. 肌肉加载下腰椎间盘突出有限元研究[J]. 医用生物力学, 2019, 34(5): 493-499.
- LIU H, SHEN GQ, ZHANG XL, *et al.* Finite element study of lumbar disc herniation loaded with muscle force [J]. *J Med Biomech*, 2019, 34(5): 493-499.
- [7] 张雄, 王天舒, 刘岩. 计算动力学[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2007: 228-229.
- [8] 李永胜, 张全有, 陈维毅. 骨骼肌收缩的本构模型[J]. 太原理工大学学报, 2005, 36(6): 761-764.
- [9] 李晓杰, 姜力, 闫鸿浩, 等. 变应变率下的肌肉本构方程[J]. 医用生物力学, 2007, 22(3): 273-276.
- LI XJ, JIANG L, YAN HH, *et al.* Constitutive equation of the muscle with various strain rate [J]. *J Med Biomech*, 2007, 22(3): 273-276.