

文章编号:1004-7220(2013)05-0523-05

# 非线性模型在椎间盘黏弹性特性分析中的应用

李睿, 郭立新

(东北大学 机械工程与自动化学院, 沈阳 110819)

**摘要:**目的 构建变参数非线性模型,研究人体椎间盘在循环应变状态下的应力松弛特性。方法 采用变参数非线性模型结合椎间盘应力松弛和蠕变反应的实验数据,研究循环应变状态下椎间盘的应力松弛特性,比较线性与非线性模型在循环状态下椎间盘黏弹性特性的差异。结果 采用变参数非线性模型得出的循环模量和松弛系数在0.01 Hz循环状态下与实验模型非常接近,得出的循环模量在0.1和1 Hz频率下也与实验值相近,但是得出的松弛系数在0.1和1 Hz频率下失真严重。结论 在压缩应变作用下椎间盘经历的是一个非线性的应力行为,非线性变参数模型更符合研究在循环应变下椎间盘应力松弛反应的需要。

**关键词:** 椎间盘; 黏弹性; 应力松弛; 蠕变反应; 循环应变

**中图分类号:** Q 811.6 **文献标志码:** A

## Application of nonlinear model in analysis on viscoelastic properties of the intervertebral disc

LI Rui, GUO Li-xin (School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China)

**Abstract: Objective** To construct a variable-parameter nonlinear model for the research on stress relaxation properties of human intervertebral disc under the cyclic strain. **Methods** The variable-parameter nonlinear model combined with experimental data on stress relaxation and creep response of the intervertebral disc were used to study stress relaxation properties under the cyclic strain and compare the differences of linear and nonlinear model in viscoelastic properties of the intervertebral disc. **Results** The cycle modulus and relaxation coefficient obtained by the variable-parameter nonlinear model under the frequency 0.01 Hz were very close to the experimental data, and the cyclic modulus under the frequency of 0.1 and 1 Hz was also close to the experimental data, but the relaxation coefficient obtained in 0.1 and 1 Hz had serious distortion. **Conclusions** The intervertebral disc experiences a nonlinear stress behavior under the compression strain, so the variable-parameter nonlinear model is more suitable for studying the stress relaxation response of the intervertebral disc under the cyclic strain.

**Key words:** Intervertebral disc; Viscoelastic properties; Stress relaxation; Creep response; Cyclic strain

椎间盘组织是脊柱的重要组成部分,具有缓冲吸振、协调脊椎运动、改善应力分布等作用。国内外学者对于椎间盘的黏弹性力学性质开展了大量的研究工作<sup>[1-6]</sup>。研究椎间盘应力应变的关系对于了解其对传递载荷的作用非常重要。相关研究都是

对椎间盘进行蠕变或者应力松弛实验,然后对实验数据进行分析得出归一化应力松弛函数和蠕变函数<sup>[7-10]</sup>;其中,所施加的载荷力都是恒定载荷,但是生产生活的实际情况大多为振动情况,故需要对椎间盘在振动环境下的相关力学性质开展研究,在建立椎间

收稿日期:2012-10-28; 修回日期:2012-12-01

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51275082, 51135003), 高等学校博士学科点基金项目(20100042110013), 中央高校基本科研业务费(N110403008)。

通信作者:郭立新,教授,博士研究生导师, E-mail: lxguo@mail.neu.edu.cn。

盘本构模型时必须考虑振动情况下的特性及参数。

实验及理论研究证明椎间盘的弹性模量是随着应变而变化的<sup>[11-12]</sup>,故本文采用变参数非线性模型并结合国内外具有代表性的椎间盘的应力松弛和蠕变反应的实验数据,研究振动状态下椎间盘的力学性质,比较线性与非线性模型在振动状态下椎间盘黏弹性特性的差异。

## 1 方法

### 1.1 二参数模型

研究材料黏弹性的力学模型有多种,早期对于椎间盘的力学建模采用的是二参数模型。线性弹性弹簧(胡克体)和线性黏滞元素(阻尼器或者牛顿体)被认为是最传统的构建黏弹性系统的模块。通过组织弹簧和线性黏滞元素的各种排列方式,构造的理论模型可以用来证实各种经验得出的结论<sup>[13-14]</sup>。其中1个弹簧和1个阻尼器的 Kelvin 体,也称为 Kelvin-Voigt 体被认为是一个最简单的排列方式用以描述椎间盘黏弹性行为。最简单的二参数模型是由1个弹簧和1个阻尼器并联而成(见图1)。弹簧的弹性常数  $K$  代表椎间盘弹性模量  $E$ ,黏性阻尼系数  $C$  代表椎间盘黏性系数  $\mu$ 。

### 1.2 三参数模型

Burns 等<sup>[15]</sup>认为当椎间盘受一个长期轴向载荷时,采用在1个 Kelvin-Voigt 体的基础上再加1个弹簧的力学模型,能够更好地描述蠕变和应力松弛特性,即三参数模型(见图2)。

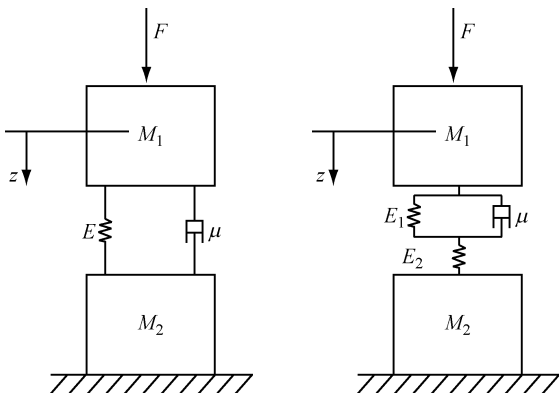


图1 二参数模型

图2 三参数模型

Fig.1 Two-parameter model Fig.2 Three-parameter model

$$a \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = b \frac{d\varepsilon}{dt} + c\varepsilon \quad (1)$$

式中: $\sigma$  为椎间盘应力, $\varepsilon$  为椎间盘应变,而 $\frac{d\sigma}{dt}$ 和 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ 分别代表与时间相关的应力和应变的变化率,方程系数由以下材料参数确定:

$$a = \frac{\mu}{E_1 + E_2}, \quad b = \frac{\mu E_2}{E_1 + E_2}, \quad c = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad (2)$$

### 1.3 变参数模型

随着研究的不断发展,研究人员发现弹性模量  $E_2$  随着应变的改变而变化<sup>[11-12]</sup>。在目前的研究中,非线性实体模型不同于线性实体模型之处在于其弹簧常数的瞬时弹性模量  $E_2$  替代为随应变线性变化的函数  $E_2(\varepsilon)$ (见图3)。

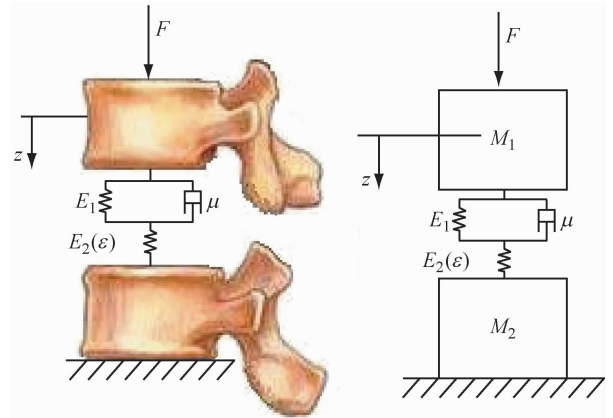


图3 变参数模型

Fig.3 Variable-parameter model

将  $E_2(\varepsilon)$  应用于模型系数式(2),得

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\mu}{E_1 + E_2(\varepsilon)}, & b &= \frac{\mu E_2(\varepsilon)}{E_1 + E_2(\varepsilon)} \\ c &= \frac{E_1 E_2(\varepsilon)}{E_1 + E_2(\varepsilon)} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

这个与应变相关的弹性模量  $E_2(\varepsilon)$  的表达式是根据文献[12]实验研究数据确定(见表1)。

表1 预加载荷力和特性参数关系

Tab.1 Preload and parameters

预加载荷力, $F/N$	刚度, $K/(N \cdot mm^{-1})$	应变, $\varepsilon/\%$	弹性模量, $E_2/MPa$
0	438	0	3.36
250	1 700	1.65	13.03
500	2 420	2.32	18.55

该模型可表达为微分方程<sup>[11]</sup>:

由最小二乘法得出椎间盘瞬时弹性模量  $E_2(\varepsilon)$  随应变  $\varepsilon$  变化的表达式为

$$E_2(\varepsilon) = 641.4\varepsilon + 3.14 \quad (4)$$

其截断误差为 0.993, 故非线性应力表达式为

$$\sigma = 641.4\varepsilon^2 + 3.14 \quad (5)$$

因此, 当受到压缩应变时, 椎间盘经历的是一个非线性应力, 这是由于椎间盘被压缩而使刚度增加。可以证明该非线性应力的表达式与其他实验研究结论一致<sup>[16-17]</sup>。

根据预应力松弛方程

$$\sigma = \varepsilon c + (\sigma_0 - \varepsilon c) \exp\left(\frac{-t + t_0}{a}\right) \quad (6)$$

以及 Holmes 等<sup>[17]</sup> 应力松弛实验的数据 (见图 4), 通过最小二乘法确定开尔文体的非线性模型常参数  $E_1$  和  $\mu$ , 经计算  $E_1 = 8.96 \text{ MPa}$ ,  $\mu = 102.3 \text{ GPa/s}$ 。其中, 应变  $\varepsilon$  保持常数, 初始条件中设预应力为  $\sigma(t_0) = \sigma_0$ , 要达到所需的预应力  $\sigma_0 = 1.25 \text{ MPa}$ , 通过求解非线性模型式(5), 得应变  $\varepsilon = 0.0417$ , 将应变  $\varepsilon$  代入式(4) 得出该应变下瞬时弹性模量  $E_2(\varepsilon = 0.0417) = 29.97 \text{ MPa}$ 。

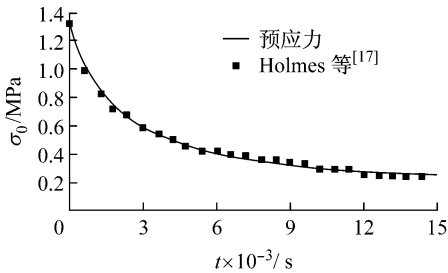


图4 预应力松弛曲线

Fig.4 Prestressed relaxation curve

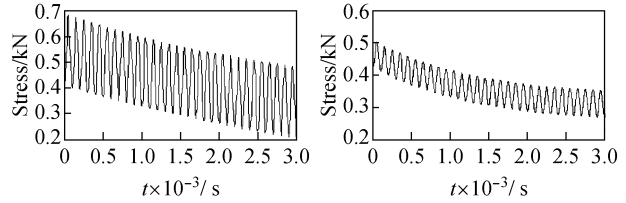
#### 1.4 循环应变作用下的非线性模型

对此非线性模型输入循环轴向应变查看其响应。输入的应变函数为

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 - \cos(\omega t)) + \varepsilon_1 \quad (7)$$

式中:  $\varepsilon_0$  为循环应变振幅,  $\varepsilon_1$  为需要达到理想预加载荷对应的应变;  $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  为循环振动频率,  $\omega$  为相应的角频率。将参数  $E_1$ 、 $E_2(\varepsilon)$  和  $\mu$  代入非线性模型式(1)和(3), 求解频率分别为 0.01、0.1 和 1 Hz 循环状态下椎间盘的应力松弛反应。由于非线性弹簧的刚度是应变的函数, 此循环松弛反应不能使用解析法求解。因此, 求解采用 MATLAB 8.0 常

微分方程求解器 ODE23, 其中频率为 0.01 Hz 时的应力松弛曲线如图 5 所示。另外, 采用 MATLAB 8.0 常微分方程求解器以脉冲输入的形式对非线性模型进行仿真 (见图 6), 其中脉冲宽度百分比为 50%, 上升沿到下降沿过渡时间取为 0.01 s。

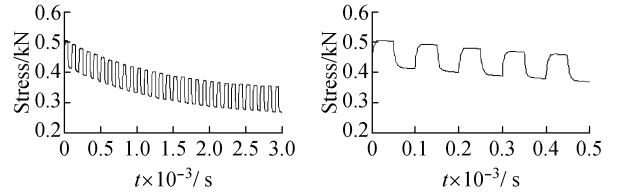


(a) 线性模型循环输入

(b) 非线性模型循环输入

图5 循环应力松弛曲线

Fig.5 Cyclic stress relaxation curve (a) Cyclic input of linear model, (b) Cyclic input of nonlinear model



(a) 非线性模型脉冲输入

(b) 非线性模型脉冲输入局部曲线

图6 脉冲应力松弛曲线

Fig.6 Pulse stress relaxation curve (a) Pulse input of nonlinear model, (b) Local curve of pulse input for nonlinear model

考察循环变形的响应特性的参数有松弛系数  $R_i$  和循环模量  $E(\omega)$ 。其中松弛系数  $R_i$  定义为

$$R_i = \frac{F_0 - F_f}{F_0} \quad (8)$$

式中:  $F_0$  为初始力值,  $F_f$  为  $n$  个周期后的均力值。

循环模量  $E(\omega)$  定义为循环应变松弛实验中  $N$  个周期后的表观应力与表观应变之比

$$E_\omega = \sigma / \varepsilon \quad (9)$$

式中:  $\sigma$  为每个循环的峰-峰应力,  $\varepsilon$  为峰-峰应变。

## 2 结果

非线性模型截断误差为 0.993 时, 椎间盘瞬时弹性模量  $E_2$  随应变  $\varepsilon$  的变化为线性的。当初始应力  $\sigma_0 = 1.25 \text{ MPa}$ <sup>[17]</sup> 时, 通过求解非线性模型方程(5), 得出应变  $\varepsilon = 0.0417$ 。非线性模型弹性模量  $E_1$  和黏度系数  $\mu$  分别为 8.96 MPa 和 102.3 GPa。

在该应变下瞬时  $E_2(\varepsilon) = 29.97 \text{ MPa}$ 。应用 MATLAB 8.0 常微分方程求解器 ODE23 求解频率分别为 0.01、0.1 和 1 Hz 循环状态下的应力松弛关系发现,频率越高求解精度越差。在频率为 0.01、0.1 和 1 Hz 循环状态下,椎间盘的应力松弛反应 50 min 结束后,非线性模型与线性模型的松弛系数  $R_i$  和循环模量  $E(\omega)$  与实验数据的对比关系如图 7 所示。非线性模型在频率为 0.01 Hz 时,其仿真得出的松弛系数  $R_i$  和循环模量  $E(\omega)$  与实验值都非常接近,而线性模型明显有较大的差异;而在较高频率下 0.1 和 1 Hz 时,无论是非线性模型还是线性模型得到的松弛系数  $R_i$  都与实验数据差距较大;非线性模型得出的循环模量  $E(\omega)$  在 0.01、0.1 和 1 Hz 时与实验数据都相近,而线性模型则差距较大。

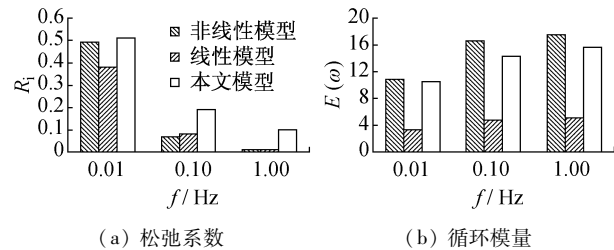


图7 仿真模型与实验数据对比图

Fig.7 Contrast of the simulation model and experimental data

(a) Relaxation coefficient, (b) Cyclic modulus

### 3 讨论

当模型受到一个线性应变输入时,椎间盘应力是非线性变化的<sup>[11-12]</sup>。这是由于随着椎间盘不断被压缩,其刚度也随之增加。因此,对椎间盘进行力学分析需要选用非线性模型。非线性模型预测了 0.01 Hz 频率下 30 个周期循环的应力松弛反应。然而,无论是线性还是非线性模型预测更高频率(0.1 和 1 Hz)下的应力松弛反应时精度都很低,这可能归因于在更高频率下模型对延迟系数预测数值的减小。对延迟系数预测的减小可能归因于非线性模型黏度系数  $\mu$  随着应变和频率会发生改变<sup>[11]</sup>。

椎间盘组织中流体的流动特性可用于解释与应变和频率都相关的黏弹性系数。生物组织的渗透性是随着应变而变化的。在外部力的作用下,机体中的孔隙体积减小,故随着压缩应变增加,组织渗透率减小<sup>[18]</sup>。随着频率升高,黏性也相应增大,表明髓

核基质具有触变性。此外,频率增加,椎间盘中液体体积的变化率也增加,流体体积的变化率也是椎间盘黏性特性发生变化的原因。上述结果有助于研究支持与应变和频率相关的黏度系数的需要,然而这些并不是本研究的范围,本研究旨在探讨与应变和频率相关的系数对椎间盘应力松弛反应的影响。

本研究采用的实验数据来自于两个不同的实验研究<sup>[12,17]</sup>。Gardner-Morse 等<sup>[12]</sup>使用女性腰椎 L2~3 和 L4~5 运动节段,而 Holmes 等<sup>[17]</sup>使用男性腰椎 L3~4 运动节段。为了帮助减少性别差异、节段高度差异和拟定两个实验数据集的差异,实验值、位移和刚度都进行了归一化处理<sup>[19]</sup>。尽管存在这些局限性,本文使用非线性模型建模的椎间盘在所有频率下的循环模量预测和实验结果很接近,证明了此模型的正确合理性。由于本研究中首次采用脉冲输入,其结果并没有相关实验得以进行验证,故暂时不进行进一步的讨论;值得注意的是要保证脉冲输入的上升沿到下降沿过渡时间在求解器允许范围内尽量小。

### 4 结论

(1) 研究椎间盘黏弹性力学问题,目前仍然按照传统连续体力学的理论方法。本文所采用的变参数模型是在传统的二参数和三参数模型的基础上结合实际情况发展的一种新型力学模型。对比实验结果可见,其对于长时间加载和低频振动的情况更符合实际需要。

(2) 椎间盘的弹性模量是随着压缩应变而变化的,在压缩应变作用下椎间盘经历的是一个非线性的应力行为。

(3) 与应变和频率相关的黏度系数对椎间盘的延迟系数有重要的影响,黏度系数变化也与椎间盘渗透率的改变有直接关系。

(4) 使用非线性模型研究循环应变下椎间盘的应力松弛反应,其得出的循环模量和松弛系数在 0.01 Hz 下与实验模型非常接近,得出的循环模量在 0.1 和 1 Hz 下也与实验值相近,但是在 0.1 和 1 Hz 下得出的松弛系数失真严重。

(5) 本研究为治疗和预防脊柱损伤、设计符合生物力学原理的骨科器械提供了科学依据,对运动员脊柱防护、科学训练等也有指导作用。

## 参考文献:

- [1] Kittusamy NK, Buchholz B. Whole-body vibration and postural stress among operators of construction equipment: A literature review [J]. *J Safety Res*, 2004, 35(3): 255-261.
- [2] Pope MH, Wilder DG, Magnusson ML. A review of studies on seated whole body vibration and low back pain [J]. *Proc Inst Mech Eng*, 1999, 213(6): 435-446.
- [3] 苏晋, 赵文志, 陈秉智, 等. 建立全腰椎有限元接触模型 [J]. *医用生物力学*, 2010, 25(3): 200-205.  
Su J, Zhao WZ, Chen BZ, *et al.* Establishing finite element contact model of human L1-L5 lumbar segments [J]. *J Med Biomech*, 2010, 25(3): 200-205.
- [4] 黄菊英, 李云海, 吴浩. 腰椎间盘突出症力学特征的仿真计算方法 [J]. *医用生物力学*, 2012, 27(1): 96-101.  
Huang JY, Li YH, Wu H. Simulation calculation on biomechanical properties of lumbar disc herniation [J]. *J Med Biomech*, 2012, 27(1): 96-101.
- [5] Arjmand N, Shirazi-Adl A. Model and in vivo studies on human trunk load partitioning and stability in isometric forward flexions [J]. *J Biomech*, 2006, 39(3): 510-521.
- [6] Franklin TC, Granata KP. Role of reflex gain and reflex delay in spinal stability: A dynamic simulation [J]. *J Biomech*, 2006, 40(8): 1762-1767.
- [7] 孙树东, 王成学, 赵长福, 等. 正常国人腰间盘纤维软骨黏弹性实验研究 [J]. *中国生物医学工程学报*, 2005, 24(3): 257-261.
- [8] Johannessen W, Vresilovic EJ, Wright AC, *et al.* Intervertebral disc mechanics are restored following cyclic loading and unloaded recovery [J]. *Ann Biomed Eng*, 2004, 32(1): 70-76.
- [9] Edwards WT, Hayes WC, Posner I, *et al.* Variation of lumbar spine stiffness with load [J]. *J Biomech Eng*, 1987, 109(1): 35-42.
- [10] 谢锋利, 吴几恺, 张均一, 等. 椎间盘纤维环黏弹性的实验研究 [J]. *吉林大学学报: 医学版*, 1990, 16(5): 443-445.
- [11] Groth KM, Granata KP. The viscoelastic standard nonlinear solid model: Predicting the response of the lumbar intervertebral disk to low-frequency vibrations [J]. *J Biomech Eng*, 2008, 30(3): 031005.
- [12] Gardner-Morse MG, Stokes IA. Structural behavior of human lumbar spinal motion segments [J]. *J Biomech*, 2004, 37(2): 205-212.
- [13] 刘炳坤. 静压载荷下椎间盘中的黏弹性应力及变形分析 [J]. *医用生物力学*, 1996, 11(1): 20-25.  
Liu BK. Viscoelastic stress and radial bulge analyses of intervertebral disc under a constant compression [J]. *J Med Biomech*, 1996, 11(1): 20-25.
- [14] 卢廷胜, 王以进, 万年宇, 等. 腰椎体椎间盘的黏弹性性质实验研究 [J]. *医用生物力学*, 1996, 11(4): 219-223.  
Lu TS, Wang YJ, Wan NY, *et al.* An experimental investigation on the viscoelasticity of the lumbar vertebra and discs [J]. *J Med Biomech*, 1996, 11(4): 219-223.
- [15] Burns ML, Kalep I, Kazarian LE. Analysis of compression creep behavior of the vertebral unit subjected to a uniform axial loading using exact parametric solution equations of Kelvin-solid model—Part I. Human intervertebral joints [J]. *J Biomech*, 1984, 17(2): 113-130.
- [16] 柳松杨, 朱东明, 孙长祝, 等. 人体椎间盘黏弹性特性的研究 [J]. *北京生物医学工程*, 1989, 8(3): 129-135.
- [17] Holmes AD, Hukins DW. Analysis of load-relaxation in compressed segments of lumbar spine [J]. *Med Eng Phys*, 1996, 18(2): 99-104.
- [18] Cheung JT, Zhang M, Chow DH. Biomechanical responses of the intervertebral joints to static and vibrational loading: A finite element study [J]. *Clin Biomech*, 2003, 18(9): 790-799.
- [19] 郑春厚. 独立分量分析算法及其应用研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学博士学位论文, 2006: 34-52.