

文章编号:1004-7220(2010)01-0063-05

· 基础研究 ·

动脉血管中非线性压力波的传播

张善元, 张涛, 杨芳

(太原理工大学 应用力学与生物医学工程研究所, 太原 030024)

摘要: 目的 建立人体动脉血管中血液流动的力学模型,研究血管中非线性压力波的传播。方法 采用H. Demiray建议的本构关系,计算大变形效应,在现时构形上建立径向运动方程。结果 采用约化摄动法由支配血液流动与管壁耦合系统的非线性偏微分方程组得到了KdV方程。结论 在一定条件下系统可能存在着精确周期波解或孤波解。

关键词: 动脉; 血管; 非线性; 约化摄动法; 孤波解

中图分类号: O347.4 文献标志码: A

Propagation of nonlinear pressure wave in artery vessels

ZHANG Shan-yuan, ZHANG Tao, YANG Fang (*Institute of Applied Mechanics and Biomedical Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

Abstract: Objective The mechanical model of nonlinear blood flow in large blood vessels is developed and the propagation of nonlinear pressure wave is studied. **Methods** Taking the effect of large deformation, nonlinear equation of motion was established in the current configuration in terms of the constitutive equations proposed by Demiray for soft biological tissues. **Result** Employing the reductive perturbation method the KdV equation is derived from the nonlinear partial equations governing the motion of coupled system. **Conclusions** It is shown from this study that the system may have an accurate periodic wave solution or solitary wave solution under certain conditions.

Key words: Artery; Vessels; Nonlinear; Reductive perturbation method; Solitary wave solutions

血液的流动与循环是生命过程中最基本最重要的组成部分,为了认识血液循环的机理,许多著名的流体力学专家为之做出了重要贡献。从 Thomas Young 研究弹性管中流体压力波传播速度开始,至今已有两百年的历史,取得了极其丰富的具有理论和临床价值的成果,形成了不少关于循环方面的专著^[1-4]。早期的研究主要是集中在线性化理论方面^[5-6],虽然各种线性化理论模型能够在特定的条件

下,可以给出一些符合实验测量的结果,但是由于做了太多的简化,限制了它们在实际应用领域的推广与应用。上世纪 80 年代以后,由于国际范围内非线性科学发展热潮的推动,开始了血管中非线性波,特别是孤立波的研究。该类研究无疑对提高疾病的诊断和治疗水平,促进医学发展有着重要意义。在最近的 30 年中,考虑诸多因素的耦合,建立了多种力学模型,研究了血液和血管壁耦合系统的非线性波

收稿日期:2009-10-16; 修回日期:2009-11-25

基金项目:国家自然科学基金项目(10772129)。

作者简介:张善元,男,教授,研究方向:生物力学。

通讯作者:张涛,Tel:13513634287,E-mail:zhangtao19821219@sina.com。

动的特征,得到了一些有意义的结果。文献[7]中是关于充液弹性薄管中非线性压力波较早的研究之一,文中基于曲面理论,借助张量工具导出了管壁的运动方程,方程中不计管壁的轴向拉伸。另外,值得一提的是 Demiray 及其合作者一直致力于该领域的研究,发表了大量的研究论文^[8-9],他们的论文中大多考虑了管壁中预应力的作用。文献[10]的作者对文献[9]中的方程采用了直接法进行求解。

一个健康人的动脉血压大约为 13.3 kPa,在心脏周期运动过程中血压的偏差为 ± 2.66 kPa。因此,在分析动脉血管中压力波的传播时,压力偏差引起的血管壁动力变形可以认为是叠加到初始静力变形上的微小扰动。本文在已有研究的基础上,忽略血液的黏性效应,认为血液为不可压理想流体,其运动为沿血管轴向的一维流动,视血管壁为不可压的软生物组织材料,运动过程中始终处于二维薄膜应力状态。流体的运动采用与已有相关研究相同的无粘管流的质量守恒方程和动量守恒方程。对于血管壁,本文认为材料不可压缩,考虑大变形效应,在现时构形上建立了径向运动方程,并利用二维情况下 Demiray 建议的应变能函数的 Taylor 展开,将其转化为位移表示的非线性偏微分方程。采用约化摄动法由支配血液与血管壁耦合系统的非线性偏微分方程组得到了 KdV 方程。由此表明,在一定条件下,系统可能存在孤波解。最后讨论了参数对孤波传播行为的影响,期望所得结果将会对血液流动过程的进一步了解和某些临床诊断有潜在应用前景。

1 血管壁运动支配方程

血管壁的无应变状态或自然状态称为原始构形,记其内半径为 R_0 ,壁厚为 H_0 。假定血管壁没有产生压力偏差时,血液对管壁有静压力 p_0 ,血管壁经历了预拉伸,取该静力平衡状态为中间构形(见图1)。在中间构形上管壁内半径为 r_0 ,壁厚为 h_0 ,法向挠度 $w_0 = \text{const}$,轴向伸长 $\lambda_x = \text{const}$,环向伸长为 $\lambda_\theta = r_0/R_0$,其中下标 x 和 θ 分别为轴向和环向坐标,取外法线方向为 z 轴正方向。从 $t=0$ 时刻起,血液流动引起压力偏差,系统受扰动进入运动状态,此后时刻 t 的构形为瞬时构形或现时构形。在现时构形中管壁的内半径为 R ,厚度为 h ,法向挠度为 w

(x, t) , x 方向的主伸长为 $\lambda_1 = \lambda_x A_x$,环向主伸长为 $\lambda_2 = \lambda_\theta A_\theta$,

$$A_x = \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad A_\theta = 1 + \frac{w}{r_0}$$

假定管壁为不可压缩材料,即 $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$,从而有 $h = \frac{H_0}{\lambda_1 \lambda_2}$, $h_0 = \frac{H_0}{\lambda_x \lambda_\theta}$, $R = \lambda_2 R_0$, $Rh = \frac{H_0 R_0}{\lambda_1}$ 。以上给出的几何关系,对建立血管壁的运动方程是重要的。

取中间构形作为参考构形,在此构形上的一个长为 dx 、宽为 $r_0 d\theta$ 、厚为 h_0 的微元体,运动后于时刻 t 的现时构形上厚度为 h ,面积元素为 $dA = A_x dx R d\theta$ 的微元体。微元体的平衡如图2所示, T_1 和 T_2 分别为单位长度上管壁中轴向和环向的膜力。

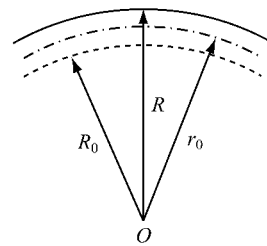
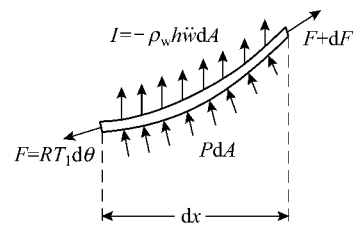


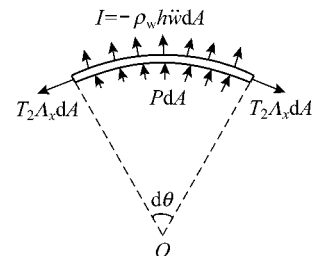
图1 三种构形下血管内壁位置示意图

Fig.1 The diagram of the vessels inter wall in three configurations



(a) 微元的纵向剖面

(a) The longitudinal profile of microelement



(b) 微元的横向剖面

(b) The lateral section of microelement

图2 现时构形中微元体的受力分析

Fig.2 The force analysis of microelement in current configuration

考虑微分单元的径向动力平衡,并化简得:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_1 R \frac{\partial w}{\partial x} \right) - T_2 \Lambda_x + P(r_0 + w) - \frac{\rho_w H_0 R_0}{\lambda_x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中, ρ_w 为血管壁材料密度。根据 Demiray^[11] 建议的软生物组织材料的本构关系,有

$$T_1(\lambda_1, \lambda_2) = \mu \frac{H_0}{\lambda_2} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \quad T_2(\lambda_1, \lambda_2) = \mu \frac{H_0}{\lambda_1} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} \quad (2)$$

式中:

$$\Sigma(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\alpha} \{ \exp[\alpha(I_1 - 3)] - 1 \} \quad (3)$$

$\mu \Sigma(\lambda_1, \lambda_2)$ 为材料的应变能密度函数; α 为材料常数; I_1 为 Finger 变形张量; μ 为材料的剪切模量。将本构关系式(2)代入到法向动力平衡方程(1),得

$$\mu H_0 R_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \mu \frac{H_0}{\lambda_x} \frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} + P(r_0 + w) - \frac{\rho_w H_0 R_0}{\lambda_x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

注意到 $\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{\lambda_x} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_x}$, $\frac{\partial \Sigma}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta}$, 则方程(4)可写成

$$\frac{\mu H_0 R_0}{\lambda_x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} + p(r_0 + w) - \frac{\rho_w H_0 R_0}{\lambda_x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

此时应变能 Σ 是 Λ_x 、 Λ_θ 的函数。将应变能函数 Σ 在 $w=0$ 处关于 Λ_x 和 Λ_θ 进行泰勒展开,然后分别对 Λ_x 和 Λ_θ 求偏导,再利用 Λ_x 和 Λ_θ 的泰勒展开式

$$\Lambda_x = \left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 + \dots, \quad \Lambda_\theta = 1 + \frac{w}{r_0} \quad (6)$$

最终可得到

$$p(r_0 + w) - \gamma_0 - \gamma_1 w + \gamma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \gamma_4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma_5 w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \gamma_6 w^2 - \gamma_7 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (7)$$

式中:

$$\gamma_0 = \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^3} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta \partial \Lambda_x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{r_0} \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_x} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^3} \right) \\ \gamma_2 &= \frac{\mu H_0 R_0}{\lambda_x} \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \Lambda_x} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^3} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^2 \partial \Lambda_\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta^2} \right) \\ \gamma_3 &= \frac{1}{r_0} \frac{\mu H_0 R_0}{\lambda_\theta} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^2 \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta^2} \right) - \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^2 \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_x} \right) \\ \gamma_4 &= \frac{1}{r_0} \frac{\mu H_0 R_0}{\lambda_x} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x^2 \partial \Lambda_\theta} + \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta^2} \right) \\ \gamma_5 &= \frac{1}{r_0^2} \frac{\mu H_0 R_0}{\lambda_x} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_x \partial \Lambda_\theta^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^2 \partial \Lambda_x} \\ \gamma_6 &= \frac{1}{2r_0^2} \frac{\mu H_0}{\lambda_x \lambda_\theta} \frac{\partial^3 \Sigma}{\partial \Lambda_\theta^3}, \quad \gamma_7 = \frac{\rho_w H_0 R_0}{\lambda_x} \end{aligned}$$

上式中,所有偏导数是在 $\Lambda_x = \Lambda_\theta = 1$ 处取值的。

2 流体运动方程

血液为理想不可压缩流体,根据流体的质量守恒和动量守恒定律,可得以下两个方程,

$$2 \frac{\partial w}{\partial t} + (r_0 + w) \frac{\partial v}{\partial x} + 2v \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

式中: ρ_f 为血液密度; A 为血管内横截面积; v 为血液轴向流动速度; x 和 t 分别为轴向坐标和时间坐标, p 是血管内血液压力。

3 约化摄动法求解非线性动力学方程组

综合方程(7)、(8)和(9),经适当整理可得支配动脉血管中血管壁与血液耦合作用下非线性波的动力学方程组:

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial w}{\partial t} + (r_0 + w) \frac{\partial v}{\partial x} + 2v \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ p(r_0 + w) - \gamma_0 - \gamma_1 w + \gamma_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma_3 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \\ \gamma_4 w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma_5 w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \gamma_6 w^2 - \gamma_7 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

线性化分析表明,方程组(10)表征的系统具有弱弥散性,采用以下 G-M 变换:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \varepsilon^{1/2}(x - c_0 t) \\ \tau &= \varepsilon^{3/2} t \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中, ε 为一小参数, (x, t) 与 (ξ, τ) 两组变量之间的偏导数关系为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\varepsilon^{1/2} c_0 \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \varepsilon c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon^2 c_0 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \tau} + \varepsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \varepsilon^{1/2} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(12)作用于方程组(10),得到

$$\left. \begin{aligned} 2c_0 \frac{\partial w}{\partial \xi} - 2\varepsilon \frac{\partial w}{\partial \tau} - (r_0 + w) \frac{\partial v}{\partial \xi} - 2v \frac{\partial w}{\partial \xi} &= 0 \\ c_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \tau} - v \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= 0 \\ p(r_0 + w) &= \gamma_0 + \gamma_1 w - \gamma_2 \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \\ &\gamma_3 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 - \gamma_4 w \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \gamma_5 w \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \\ &\gamma_6 w^2 + \gamma_7 \varepsilon \left(c_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\varepsilon c_0 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

将未知变量 w, v, p 表达为如下渐进展开

$$\left. \begin{aligned} w &= \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \dots \\ v &= \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \\ p &= p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将式(14)代入到(13),可以得到关于 ε 的一阶、二阶方程组。

$O(\varepsilon)$ 阶的方程为

$$\left. \begin{aligned} 2c_0 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} - r_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} &= 0 \\ c_0 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_1}{\partial \xi} &= 0 \\ p_1 &= \frac{\gamma_1 - p_0}{r_0} w_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$O(\varepsilon^2)$ 阶的方程为

$$\left. \begin{aligned} 2c_0 \frac{\partial w_2}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial \tau} - r_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - 2v_1 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} &= 0 \\ c_0 \frac{\partial v_2}{\partial \xi} - \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial \xi} - \frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p_2}{\partial \xi} &= 0 \\ p_2 r_0 &= -p_1 w_1 - (p_0 - \gamma_1) w_2 - \gamma_2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} + \\ &\gamma_6 w_1^2 + \gamma_7 c_0^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

对式(15)直接积分,取积分常数为零(由于 $\xi \rightarrow \infty$, $v_1 = R_1 = p_1 = 0$),可得

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{r_0}{2c_0} v_1, \quad p_1 = c_0 \rho_f v_1 \\ p_1 &= \frac{\gamma_1 - p_0}{r_0} w_1, \quad c_0^2 = \frac{\gamma_1 - p_0}{2\rho_f} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

记

$$v_1 = u(\xi, \tau), \quad w_1 = \frac{r_0}{2c_0} u, \quad p_1 = c_0 \rho_f u \quad (18)$$

将式(18)代入到二阶近似方程(16),消去 p_2, w_2, v_2 ,得到如下形式的 KdV 方程:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + au \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (19)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{r_0}{\gamma_1 - p_0} \gamma_6 \right] \\ b &= \frac{c_0}{2(\gamma_1 - p_0)} (c_0^2 \gamma_7 - \gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(19)左边第1项为非定常项,第2项为非线性项,第3项为弥散项, a 为非线性系数, b 为弥散系数。假定 KdV 方程(19)有如下形式的行波解:

$$u = u(\eta), \quad \eta = \xi - c\tau \quad (22)$$

代入到(19),经积分变换,得

$$\left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 = -\frac{1}{3b} (au^3 - 3cu^2 - 6Au - 6B) \quad (22)$$

其中, A, B 为积分常数。式(22)右端是关于 u 的三次多项式,它有3个零点为 u_1, u_2 和 u_3 ,取 $u_3 \leq u_2 \leq u_1$,则(22)可以写成

$$\left(\frac{du}{d\eta} \right)^2 = -\frac{1}{3b} (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) \quad (23)$$

由椭圆函数理论可知,方程(19)有椭圆函数精确周期解

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) \text{cn}^2 \times$$

$$\sqrt{\frac{a}{12b}(u_1 - u_3)\xi - c\tau} \quad (24)$$

其模数 m 满足,

$$m^2 = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3} \quad (25)$$

式中:

$$\left. \begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \frac{3c}{a} \\ u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 &= \frac{6bA}{a} \\ u_1 u_2 u_3 &= -\frac{3bB}{a} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

当 $u_2 \rightarrow u_1$ 时, $m \rightarrow 0$, 此时方程(19)有线性波解

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) \cos^2 \sqrt{\frac{a}{12b}(u_1 - u_3)\xi - c\tau} \quad (27)$$

当 $u_2 \rightarrow u_3$ 时, $m \rightarrow 1$, 此时方程(19)有孤波解

$$u = u_2 + (u_1 - u_2) \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{a}{12b}(u_1 - u_2)(\xi - c\tau)} \quad (28)$$

式(28)的图象如图3所示

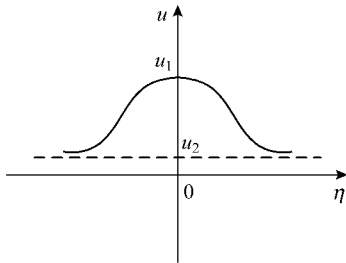


图3 KdV 方程(19)的孤波解

Fig.3 The solitary wave solution of the KdV equation

如果进一步令 $u_2 = 0$, 则 $u_1 = \frac{3c}{a}$, 则(28)可简化成

$$u = \frac{3c}{a} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{c}{4b}(\xi - c\tau)} \quad (29)$$

若要求 $c > 0$, 则 $b > 0$ 。

4 结果与讨论

(1) 本文在长波近似情况下, 考虑了血液流动的对流项以及血管壁的大变形, 采用二维情况下 H. Demiray 建议的应变能函数本构关系, 研究了人体动脉血管中非线性压力波的传播, 借助约化摄动法从

血液与血管壁耦合作用下的动力学方程组得到了 KdV 方程。对应于不同参数, KdV 方程的解有线性波解, 椭圆函数精确周期解及孤波解 3 种形式。由此表明, 在一定条件下, 该固液耦合系统存在孤波解。

(2) 从式(17)中第 4 式看出, $c_0^2 > 0$, 要求 $\gamma_1 > p_0$, 在此条件下有 $a > 0$ 。又从式(29)可以看出, 若 $c > 0$, 要求有实值的解存在, 则必须有 $b > 0$, 进而要求 $c_0^2 \gamma_1 > \gamma_2$, 由此给出椭圆函数精确周期波解或孤波解存在的必要条件。从式(29)看出, 方程(19)中的系数 a 和 b 对式(28)、(29)中的孤波传播特征有重要影响, 波的幅值与 a 成反比, 波的宽度与 b 的平方根成正比, 显然, a 和 b 的减小会导致孤波的陡峭 (Steepening) 与峰化 (Peaking)。这些现象是孤波应用的重要指标。从式(20)可以看出, 系数 a 和 b 的取值依赖于初始条件和管壁材料的力学性质。当人体内血管发生病变时, 其厚度 H_0 、材料的应变能密度函数 $\mu \Sigma(\lambda_1, \lambda_2)$, 材料常数 α 将随之变化, 则孤波的波速、振幅都会相应改变。所以, 从临床应用的角度看, 可以通过检测血管中孤波的振幅或速度来辅助诊断动脉血管病变。因此, 这里得到的结果期望对血液流动过程的进一步了解和某些疾病的临床诊断有潜在应用前景。

(3) 用数学模型来描述现实生活中的任何一个物理过程, 都有其局限性, 每次只能考虑其主要过程。实际上, 人体的血管是多级分叉的动脉树结构, 在每一分叉处血液的流动将产生反射波和透射波, 文献[4]中建立了动脉血管中血液流动的线性分叉理论, 文献[14-16]中研究了动脉血管中血液流动的非线性分叉过程。根据血液流动过程中的压力平衡、质量守恒定理, 及其已有的研究表明, 在动脉血管分叉处, 与入射波相比, 反射波极其微弱, 而透射波幅值几乎与入射波幅值大小相当。

(4) 实际上, 血液是具有黏弹性的液体, 血液在流动过程中, Reynolds number N_R 与 Womersley number N_w 远远大于 1, 所以血液的黏性效应仅仅表现在与血管壁接触的极薄的边界层, 该边界层的厚度比血管半径要小的多。文献[17]中讨论了弹性杆中的黏性效应, 文献[18]中讨论了血液流动过程中的粘性效应。已有研究表明, 当忽略黏性耗散效应

(下转第 73 页)