文章编号:1004-7220(2009)04-0276-05

建立基于广义 Hamilton 及 Lie 群理论的人体骨肌系统动力学方程

魏高峰[1,2]，　白雪岭[1]，　张希安[1]，　唐　刚[1]，　王成焘[1]
(1.上海交通大学 生物医学制造与生命质量工程研究所,上海,200240;2.军事医学科学院 卫生装备研究所,天津,300161)

摘要：目的　建立一种基于广义 Arial 及 Arial 群理论的人体骨肌系统动力学建模方法。**方法**　首先,定义了人体骨肌系统的广义坐标,建立了人体骨肌系统 Arial 群位形流形;其次,在广义 Arial 动力学体系下建立了人体骨肌系统的动力学模型;最后,研究了该动力学模型的计算方法。**结果**　给出了基于广义 Arial 及其群理论的人体骨肌系统动力学方程,并以一个举重动作为例进行了骨肌系统动力学算法分析。**结论**　所提出的人体骨肌系统动力学方程能够有效真实地对人体骨肌系统进行动力学描述,为人体骨肌系统动力学分析提供了一种新方法。
关键词： 广义 Arial；Arial 群；人体骨肌系统；动力学；生物力学
中图分类号： TP391.9　　**文献标志码：** A

Biodynamic model of human musculoskeletal system based on the general Hamilton and Lie group theory

WEI Gao-feng[1,2],　BAI Xue-ling[1],　ZHANG Xi-an[1],　TANG Gang[1],　WANG Cheng-tao[1] *(1.Biology Manufacture & Life Quality via Engineering Institute, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China; 2.Inst. of Medical Equipment, China Academy of Military Medical Science, Tianjin 300161, China)*

Abstract: Objective　A biodynamic modeling method of human musculoskeletal system based on the general Hamilton and Lie group theory was proposed. **Method**　First, the general coordinate and the Lie configuration manifold of human musculoskeletal system were defined. Second, the biodynamic model of human musculoskeletal system was constructed under the general Hamilton theory. In the end, the computer program of this new algorithm was developed. **Result**　The biodynamic equations of human musculoskeletal system based on the general Hamilton and Lie group theory were developed. A weight lifting behavior's model based on this method was given as an example which proved this method valid. **Conclusions**　The biodynamic equations in this paper could model the human musculoskeletal kinematic and kinetic behavior efficaciously and genuinely which provides a new method for human musculoskeletal biodynamic analysis.
Key words: General Hamilton; Lie Group; Human Musculoskeletal; Dynamics; Biomechanics

人体骨肌系统是实现人体各种运动的生理物质基础,是人体同外界进行动力学交互作用的根本,同时也是人体其他器官和系统的基本生存条件,其宏观上的主要特性表现为与运动和力相关的动力学问题。因此,对人体骨肌系统进行动力学方面的研究具有非常重要的意义,尤其是在临床医学、康复医学、整形外科、人机工程学、体育科学、军事医学、生物力学等领域具有更为重要的意义[1-3]。人体科学

收稿日期:2009-06-03；**修回日期:**2009-06-19
基金项目:国家自然科学重点项目(30530230)。
作者简介:魏高峰(1981-),助理研究员,研究方向:人体生物力学与虚拟现实。
通讯作者:王成焘,教授,Tel:(021)34206128,E-mail: trib@sjtu.edu.cn。

和系统工程认为人体是一个包含在宇宙中开放的、复杂的系统。其开放性表现在:一方面人体每时每刻都要通过呼吸、排泄、运动等行为与外界进行物质和能量的交换;另一方面则通过视听、语言等进行信息的交流、其复杂性则表现在人体的各组成部分具有多层次、多功能以及极其复杂的生理活动等[4]。人体骨肌系统动力学建模研究就是建立在上述人体科学和系统工程的观点之上,运用分析力学和现代数学的方法,对人体的骨骼和肌肉系统动力学、运动学特征进行研究,目的是寻找人体运动的深层次力学规律,探索产生人体运动的基本生理机制及其与运动的关系,为相关学科的发展及相应的应用研究提供理论基础。本文针对人体骨肌系统动力学的开放性和复杂性,从能量交换的角度出发,提出了一种基于广义 Hamilton 及 Lie 群理论的人体骨肌系统建模方法,并给出了一个举重动作的骨肌系统动力学算法。

1 人体骨肌系统的广义坐标及 Lie 群位形流形

1.1 人体骨肌系统广义坐标的定义

人体骨肌系统可分为骨骼系统和肌肉系统两个部分,其中肌肉系统是整个骨肌系统的能量输入系统,起着驱动骨肌系统运动的作用;而骨骼系统则是骨肌系统的执行机构,是肌肉能量的转化形式;骨肌系统的外部负载或内部关节的生物摩擦则是系统的能量耗散部分。因此,人体骨肌系统是一个带有能量耗散项的非线性多刚体动力学系统,本文应用广义 Hamilton 系统理论对其动力学行为进行分析。图 1 所示为"中国力学虚拟人"所建立的人体骨骼系统模型[5]。这里将人体每一段骨骼作为刚体来处理,而关节间的连接关系也被理想化,只考虑其运动约束关系,而忽略微观的运动以及接触关系。在确定人体骨肌系统的广义坐标之前,先对其:进行连接上的简化,具体如下:(1) 假定人体骨肌系统左右对称;(2) 将人体骨肌系统的关节连接近似为理想的单轴铰链连接或球铰连接;(3) 将人体骨肌系统的运动简化为纯粹的力学问题,忽略次要的生理及环境因素的影响,人体骨骼被定义为刚体,整个人体骨肌系统考虑惯性力、重力以及科氏力的影响;(4) 在关节-肌肉动力学模型中加入被动非线性阻尼,作为人体骨肌系统的能量耗散项,以模拟人体中关节滑液及摩擦对运动的影响。

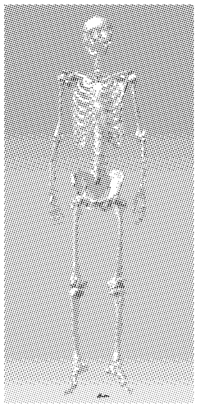

图 1 中国力学虚拟人骨骼系统模型

Fig.1 China Mechanical Virtual Human Skeleton System 3D Model

根据以上假定,人体骨肌系统动力学分析可以分为三个部分,分别是骨骼系统的运动学分析、肌肉的动力学分析以及骨肌系统的整体动力学分析。这里设定人体骨肌系统的广义坐标为各个关节处的转角,即 $q^i(i=1,2,\cdots,N)$。其中,简化为单轴的铰链连接关节由受约束的旋转李群 $SO(2)^i_{\mathrm{cnstr}}$ 表示,其参数为约束转角 $q^i_{\mathrm{cnstr}} \equiv q^i \in [q^i_{\min}, q^i_{\max}]$;3 个旋转自由度的球铰关节则由受约束的旋转李群 $SO(3)^i_{\mathrm{cnstr}}$ 表示,其参数为约束欧拉角 $q^i = q^{\phi_i}_{\mathrm{cnstr}}$。根据李群的性质,两个李群的直积同样也构成一个李群,且李群一定是一个微分流形。因此,人体骨肌系统 N 个关节处旋转李群的直积构成了人体骨肌系统的 N 维位移流形 Q^N。图 2 是根据中国力学虚拟人解剖模型所建立的人体骨肌系统李群直积图。其中,间隔线段"-"代表直积运算,图整体表示了人体骨肌系统位移流形 Q^N 的构成。

1.2 人体骨肌系统 Lie 群位形流形

对人体骨肌系统的约束旋转 Lie 群 $SO(n)^i$ 应用 Lie 算子,将得到其正切空间 Lie 代数 $SO(n)_i$。在正切空间 Lie 代数上应用同构算子 Dual 得到余切空间 Lie 代数 $SO(n)^*_i$,即正则空间 Lie 代数 $SO(n)^*_i$。也可以对 $SO(n)^i$ 直接应用正则化算子 Can 得到 $SO(n)^*_i$。根据 Lie 群的这些性质,对人体骨肌系统约束旋转Lie群位形流形 Q^N 应用Lie算子,

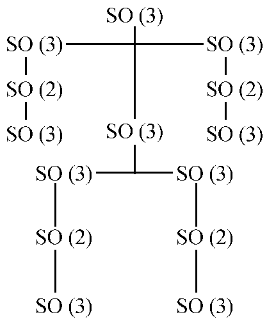

图 2 人体骨肌系统约束旋转李群位移流形

Fig.2 Constraint Joint Rotation Lie Group Manifold of Human Musculoskeletal System

从而将其转变为正切空间 Lie 代数所构成的直积树。与此同时,对人体骨肌系统约束旋转 Lie 群位形流形 Q^N 应用正则化算子,则可将其转变为余切空间 Lie 代数。而正切空间 Lie 代数和余切空间 Lie 代数都包含无限小变换群,即前者包含角速度 $\dot{q}^i = \dot{q}^{\phi_i}$,而后者包含角动量 $p_i = p_{\phi_i}$。Q^N 的正切空间 TQ^N 由 Lie 算子定义,即为系统的二阶 Lagrangian 运动方程,和角速度 $\dot{q}^i$ 相关;Q^N 的余切空间 $T^* Q^N$ 由正则化算子 Can 定义,即为系统的 Hamilton 运动方程,和动量 p_i 相关,从而构成了人体骨肌系统的动量相空间;而同构算子 Dual 将两者联系了起来,如图 3 所示。

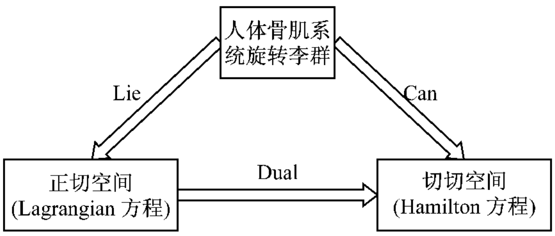

图 3 人体骨肌系统位移流形的 Lie 变换

Lie Transformation of Human Musculoskeletal System Configuration Manifold

2 人体骨肌系统广义 Hamilton 动力学方程

2.1 广义 Hamilton 动力学体系

众所周知,Hamilton 动力学体系是一类动态系统,它广泛存在于物理科学、生命科学及工程科学等众多领域,特别是经典力学、天体力学、航天科学以及生物工程的很多模型都以 Hamilton 动力学体系的形式出现,它的产生与发展具有深刻的物理背景。而作为 Hamilton 动力学体系最一般的形式,广义 Hamilton 动力学体系所描述的是一类既具有能量耗散、又具有能量产生以及与外部环境有能量交换的开放动力学系统。广义 Hamilton 动力学体系具有以下几个特点:首先,广义 Hamilton 动力学体系结构清晰,Hamilton 函数是系统的广义能量(动能与势能之和),在数学上,这种结构由伪 Poisson 流形提供的几何框架保证了其结构的完整性;其次,在一定的条件下,Hamilton 函数构成系统基于能量的 Lyapunov 函数,这在动力学系统的稳定性分析或镇定控制中起到了十分重要的作用;再次,在某些动力学系统控制问题中,广义 Hamilton 动力学体系具有明显的优越性。

2.2 肌肉力计算模型

英国生理学家 Hill 于 1938 年对肌肉的力学特性进行了研究,提出了 Hill 肌肉力学模型[6],如下所示。

(1)肌肉收缩动力学方程

$$\begin{cases} F_{\mathrm{CE}} = \dfrac{bF_0 + a\dot{L}_{\mathrm{CE}}}{b - \dot{L}_{\mathrm{CE}}} \\ F_0 = F_{\max}\left[1 - \left(\dfrac{L_{\mathrm{CE}} - L_{\mathrm{CEOPT}}}{0.5L_{\mathrm{CEOPT}}}\right)^2\right] \end{cases} \tag{1}$$

式中:F_{CE}表示肌肉的收缩力;L_{CE}表示收缩肌纤维束的长度;L_{CEOPT}表示收缩肌纤维束长度的最优值,a,b 分别表示肌肉收缩过程中能量分配参数以及能量的转换率,其值由 Hill 通过实验测定。将式(1)中的 Hill 模型代入人体骨肌系统动量相空间下,则有

$$F_i^{\mathrm{Hill}} = \frac{(F_i^0 b_i - a_i p_i)}{(p_i - b_i)}, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{2}$$

式(2)即为 Hamilton 动量相空间下的肌肉收缩方程。

(2) 肌肉刺激动力学方程

肌肉的刺激动力学可以描述为脉冲动量与时间的关系:

$F_i^{\mathrm{imp}} = F_i^0(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_i})$, 生物电刺激信号 > 0;

$F_i^{\mathrm{imp}} = F_i^0 \mathrm{e}^{-t/\tau_i}$,生物电刺激信号 $= 0$(即无刺激信号时)。这里,F_i^0 表示作用于第 i 个关节的最大等张肌肉力,τ_i 表示每个肌肉的时间常数。

根据以上的肌肉收缩动力学方程以及肌肉刺激动力学方程,能够描述第 i 个关节的肌肉刺激-收缩

动力学为:

$$F_i(t,q,p) = F_i^{\mathrm{imp}} \times F_i^{\mathrm{Hill}}, \quad i = 1,2,\cdots,N \quad (3)$$

式(3)总体上给出了人体骨肌系统的驱动转矩 $F_i = F_i(t,q,p)$,描述了骨骼肌肉执行机构的内部刺激和收缩动力学,给出了人体骨肌系统动量相空间中每一个关节处的肌肉动力学方程。

2.3 人体骨肌系统广义 Hamilton 动力学方程

基于以上基本假定和人体骨肌系统广义坐标的定义,利用广义 Hamilton 系统建模理论,对人体骨肌系统建模如下:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{q}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}} + \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{p}} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}} + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \dot{\boldsymbol{q}} \end{cases} \quad (4)$$

式中:q 代表广义坐标矩阵,即 $\boldsymbol{q} = [q^1, q^2, \cdots, q^N]$;$\boldsymbol{P}$ 代表系统的广义动量矩阵,即 $\boldsymbol{p} = [p^1, p^2, \cdots, p^N]$;$\boldsymbol{H}$ 代表人体骨肌系统的 Hamilton 函数矩阵,即为人体骨肌系统的动能和势能的总和;$\boldsymbol{R}$ 代表非线性耗散函数矩阵,$\boldsymbol{u}$ 为人体骨肌系统能量的损耗函数矩阵;$\boldsymbol{y}$ 代表作用于骨骼系统上的肌肉力以及外力矩阵;$\boldsymbol{R}$ 代表广义坐标速度矩阵,即人体骨肌系统的广义速度矩阵,也是本耗散 Hamilton 系统的输出矩阵。没有主动肌肉力的驱动和外界的负载时,即 $\boldsymbol{u} = 0$ 时,该系统将退化为:(1)当 $\boldsymbol{R} = 0$ 时,系统变为保守的哈密顿系统;(2)当 $\boldsymbol{H} = 0$ 时,系统变为纯梯度系统.

2.4 人体骨肌系统广义 Hamilton 动力学方程中的参数计算

首先,计算人体骨肌系统 Hamilton 动力学方程中的耗散函数。根据不受力情况下的 Van del pol 振荡方程,来推导人体关节动力学方程[7]为:

$$\ddot{x} - (a + bx^2)\dot{x} + x = 0$$

即为不受力情况下的 Van del pol 振荡方程,其中 a,b 分别为系统振荡时的能量耗散系数. 这里,阻尼力 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{dmp}}(\dot{x}) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \dot{x}}$,耗散函数定义为 $\boldsymbol{R} = \dfrac{1}{2}(a + bx^2)\dot{x}^2$。在人体骨肌系统动力学计算中,用系统的广义坐标替代 x,而用广义动量替代 $\dot{x}$,经过求和得到人体骨肌系统的整体耗散函数为:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} p_i^2 [a_i + b_i (q^i)^2] \quad (5)$$

式中,a_i 和 b_i 表示耗散参数。其偏微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{p}}$ 则是人体关节中组织液所产生的黏性力,这个力和 p_i 成线性关系、同 q^i 成二次关系。

其次,进行人体骨肌系统 Hamilton 矩阵函数的计算。根据广义 Hamilton 函数的定义,人体骨肌系统的 Hamilton 矩阵函数为

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{P} + \boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{q}) \quad (6)$$

式中:$\boldsymbol{\kappa}$ 是系统的动能矩阵;$\boldsymbol{\rho}$ 是系统的势能矩阵。这里

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{2}\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{P} = \frac{1}{2} g^{ij}(\boldsymbol{q}, m) p_i p_j \quad (7)$$

$$g^{ij}(\boldsymbol{q}, m) = \sum_{x=1}^{n} m_x \delta_{rs} \frac{\partial q^i}{\partial x^r} \frac{\partial q^j}{\partial x^s} \quad (8)$$

对于非冗余的人体骨肌系统动力学模型,广义 Hamilton 模型可以写成如下形式:

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial p^i} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q^i} \quad (9)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{F}_i - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial q^i} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial p^i} \quad (10)$$

$$q^i(0) = q_0^i, p_i(0) = p_i^0, (i = 1,2,\cdots,N) \quad (11)$$

式(9)为系统的速度矢量场方程,式(10)为系统的力矢量场方程,式(11)为系统关节的初始角度和角动量。这里,$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 表示 Raileigh 非线性耗散函数,$\boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为肌肉力所产生的转矩,由肌肉的刺激和收缩动力学特性所定义。速度矢量场(9)和力矢量场式(10)一起定义了系统的总的 Hamilton 矢量场 $\boldsymbol{X}_H$。$\boldsymbol{X}_H$ 在几何上代表了动量相空间流形 $T^* Q^N$ 的段,而 $T^* Q^N$ 则是人体骨肌系统位形流形 Q^N 的余切束,Hamilton 函数则是其生成函数。系统位移流形 Q^N 定义为一个 N 维的环面 T^N,其相应的动量相空间流形则是 Q^N 的 $2N$ 维余切束空间 $T^* T^N$。这样,式(9)和(10)就得到了相对简单的如下扩展形式:

$$\dot{\boldsymbol{q}}^i = p_i\{[J_i]^{-1} + [m_i(\sum_{j=1}^{i} L_j \cos q^j)^2]^{-1}\} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial p_i} \quad (12)$$

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \boldsymbol{F}_i(t, q^i, p_i) - g\sum_{j=i}^{10-i} L_{jj} \sin q^j - \sum_{j=i}^{10-i} L_j \sin q^j p_i p_j [m(\sum_{k=1}^{i} L_k \cos q^k)^3]^{-1} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial q^i} \quad (13)$$

L_j、m_j 以及 J_i 分别表示人体骨骼段的长度、质量和转动惯量,g 为重力加速度。

3 举重动作的人体骨肌系统广义 Hamilton 动力学算法

根据以上的建模方法，对于人体举重动作进行了相应的建模研究。首先，针对举重动作的特点，定义人体骨肌系统广义坐标如下：

q^1 为踝关节；q^2 为膝关节；q^3 为髋关节；q^4 为腰椎和骨盆在正中矢状面的弯曲；q^5 为肩关节；q^6 为肘关节；q^7 为腕关节。

这里，所有的关节转角 q^i 代表了平面内旋转的李群 $SO(2)^i$，其7次张量积给出了一个7维的环面 $\boldsymbol{T}^7$，这是一个由 7×7 非退化对角线矩阵组成的 Abelian 李群。因此，举重动作的动力学模型可以被定义为一个6维的余切束 $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}^7$，包括了关节转角 $\boldsymbol{Q}=q^i$ 和相应的关节转矩 $\boldsymbol{P}=p_i$，如下所示：

$$\boldsymbol{P}=\int_{t0}^{t1}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})-\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\boldsymbol{q}}+\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{p}}\right)d\boldsymbol{\tau} \quad (14)$$

由此将举重动作时的人体骨肌系统动力学位形流形 Q^N 转换成了7维的环面 $\boldsymbol{T}^7$；而相应的人体骨肌系统动量相空间 $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{Q}^N$ 则转换为6维的余切束 $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}^7$。在举重动作的动量相空间 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T}^7$ 中，哈密顿函数的生成过程如下：

$$\boldsymbol{H}:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{R},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})+\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q})$$

建立在 $\boldsymbol{M}$ 上的人体骨肌系统哈密顿矢量场 $\boldsymbol{X}_H$ 代表了举重动作的保守动力学模型，$\boldsymbol{X}_H$ 由基于正则化的广义坐标的哈密顿函数的偏微分所定义如下：

$$\boldsymbol{X}_H=\left(\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\boldsymbol{p}},\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial\boldsymbol{q}}\right) \quad (15)$$

为了更加方便地计算势能和动能，定义了两个相关的位移向量 $\boldsymbol{r}_j^V$ 和 $\boldsymbol{r}_j^T$ 分别为：

$$\boldsymbol{r}_j^V=\sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{j}\sigma_iL_i(1-\cos q^i) \quad (16)$$

$$\boldsymbol{r}_j^T=\sum_{j=1}^{7}\sum_{i=1}^{j}L_i\cos q^i \quad (17)$$

这里，$\boldsymbol{\sigma}=[-1,-1,-1,0,-1,1,1]$，$L_i$ 表示了人体各段的长度。通过使用 $\boldsymbol{r}_j^V$ 和 $\boldsymbol{r}_j^T$ 而得到势能：

$$V(q)=g\sum_{j=1}^{7}m_jr_j^V \quad (18)$$

式中：g 表示重力加速度；m_i 表示各段的质量。动能如下：

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}g^{ij}p_ip_j=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}\{[m_i(r_j^T)^2]^{-1}+[J_i]^{-1}\}p_ip_j \quad (19)$$

这里 $g^{ij}=g^{ij}(q,m)$，相应的圆括号里的是协变量矩阵张量。

根据式(12)和(13)的扩展形式，建立了14个举重动作时人体骨肌系统的广义 Hamilton 动力学方程。

4 结论

本文根据人体骨肌系统非线性、具有耗散项等特点，基于广义 Hamilton 及 Lie 群理论，建立了人体骨肌系统的广义 Hamilton 动力学方程。该方程的创新之处在于，考虑了人体骨肌系统中肌肉力以及关节滑液的作用，建立了相应的方程。同时，引入耗散函数，更加真实地反映了人体骨肌系统的实际行为。通过对举重动作时人体骨肌系统的动力学行为进行研究，推导出相应的广义 Hamilton 方程，给出了算法，为人体骨肌系统动力学建模和计算提供了一种新方法。

然而，广义 Hamilton 及 Lie 群理论都是目前比较前沿的理论，许多数学上的问题还在探讨当中，因此，其相应的计算方法也不成熟，目前也没有相应的软件和算法。本文所建立的人体骨肌系统广义 Hamilton 动力学方程十分复杂，目前难以进行计算机求解。如何对其进行有效而准确的解算，形成简便易用的软件模块，还有待于进一步研究。

参考文献：

[1] Crampin E, Smith N, Hunter P. Multi-scale Modeling and the IUPS Physiome Project[J]. Journal of Molecular Histology, 2004, 35(7): 707-714.

[2] 王超，张春秋，董心，等. 骨功能适应性数值模拟的若干进展[J]. 医用生物力学，2008，23(5)：399-404.

[3] 程亮，王冬梅，王成焘. 骨重建数值仿真中的控制方程[J]. 医用生物力学，2007，22(4)：417-422.

[4] 钱学森. 论人体科学[M]. 北京：人民军医出版社，1988.9-12.

[5] 王成焘. 中国力学虚拟人[J]. 医用生物力学，2006，21(3)：172-178.

[6] Hill A V. The Heat of Shortening and the Dynamic Constants of Muscle[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1938, 126(10):136-195.

[7] Ebb D, Tuttle R H, Baksh M. Pendular activity of human upper limbs during slow and normal walking[J]. American Journal of Physical Anthropology, 1994, 93: 477-4.